Análisis de Series de Tiempo

Minicurso práctico en Python

II Escuela de Verano de Modelación para la Sostenibilidad
1 a 5 de agosto de 2016

Sede: Centro de Ciencias de la Complejidad (C3), UNAM

Juan C. Toledo (C3)
juan.toledo@nucleares.unam.mx

Resumen

- Preliminares
  - Instalación de Python + librerías
  - Mini tutorial de Python
- Día 1:
  - Series de tiempo: descripción general
  - Noción de estacionariedad
  - Modelación de series de tiempo:
    - Modelos Autoregresivos (AR)
    - Modelos de Media Móvil (MA)
    - Modelos combinados (ARMA)
- Día 2: análisis de Fourier y métodos de análisis avanzados

Preliminares

- En este curso usaremos Python 3 + librerías
- ¿Por qué Python?
  - Lenguaje de programación general
  - Sintaxis intuitiva, ligera y muy poderosa
  - Muy popular en muchos contextos (inc. ciencia, big data)

Language Rank		Types	Spectrum Ranking
1.	C		100.0
2.	Java		98.1
3.	Python		98.0
4.	C++		95.9
5.	R		87.9
6.	C#		86.7

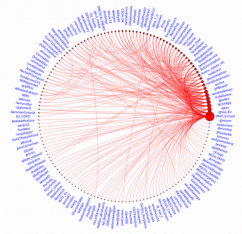
(2016 IEEE Spectrum Language Rankings)

Librerías

Python es lenguaje general → no incluye herramientas específicas para cómputo científico o análisis de datos :(

Pero existe un gran ecosistema de librerías para esto:

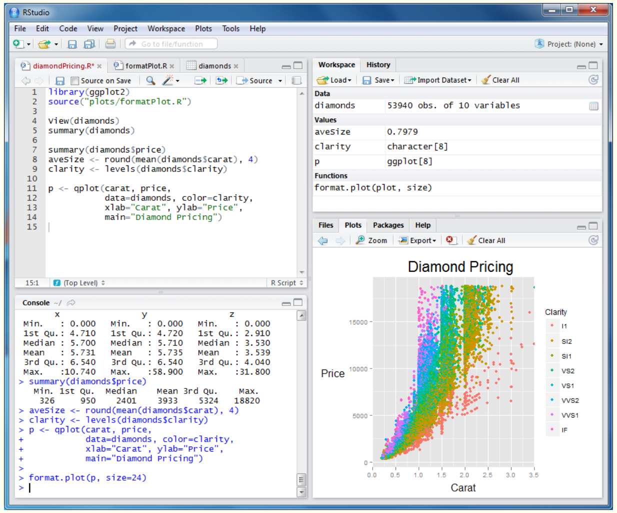
- **numpy**: cómputo numérico, álgebra, matrices http://www.numpy.org/
- **scipy**: herramientas para cómputo científico https://www.scipy.org/
- **matplotlib**: gráficas de calidad publicación http://matplotlib.org/
- **pandas**: análisis de datos http://pandas.pydata.org/
- **scikitlearn**: herramientas de machine learning http://scikit-learn.org/
- **networkx**: análisis de redes https://networkx.github.io/
- etc ...



Todas son librerías **open source** y **gratuitas**.

Alternativa: **R**

- Creciente popularidad
- Entorno 100% integrado dedicado a análisis de datos, cómputo científico y estadística
- Muchas referencias con ejemplos para R
- Sugerencia R Studio: https://www.rstudio.com/home/



Volviendo a Python: Anaconda

- Es una plataforma integrada para ciencia de datos
- Varios entornos gráficos de programación
- Integra numpy, scipy, matplotlib, jupyter, etc.
- Disponible para Windows, Mac y Linux
- Incluye instalación de Python

Instalación de Anaconda

1) Descargar Anaconda: https://www.continuum.io/downloads
Esto incluye todo lo necesario.

ó

2) Descargar miniconda: http://conda.pydata.org/miniconda.html
Versión minimalista de Anaconda + instalar librerías requeridas desde la terminal usando el comando ‘conda’:

```
conda install numpy matplotlib pandas statsmodels jupyter
```

En cualquier caso, seleccionar **Python 3.5** y **64 bits**

3) Descargar el material del curso en:

http://meithan.net/curso/

y descomprimirlo en un lugar cómodo

Juan C. Toledo (C3)
juan.toledo@nucleares.unam.mx

Jupyter Notebook

Usaremos el **Jupyter Notebook**, un intérprete interactivo multiplataforma que corre en el browser.

Para iniciarlo:

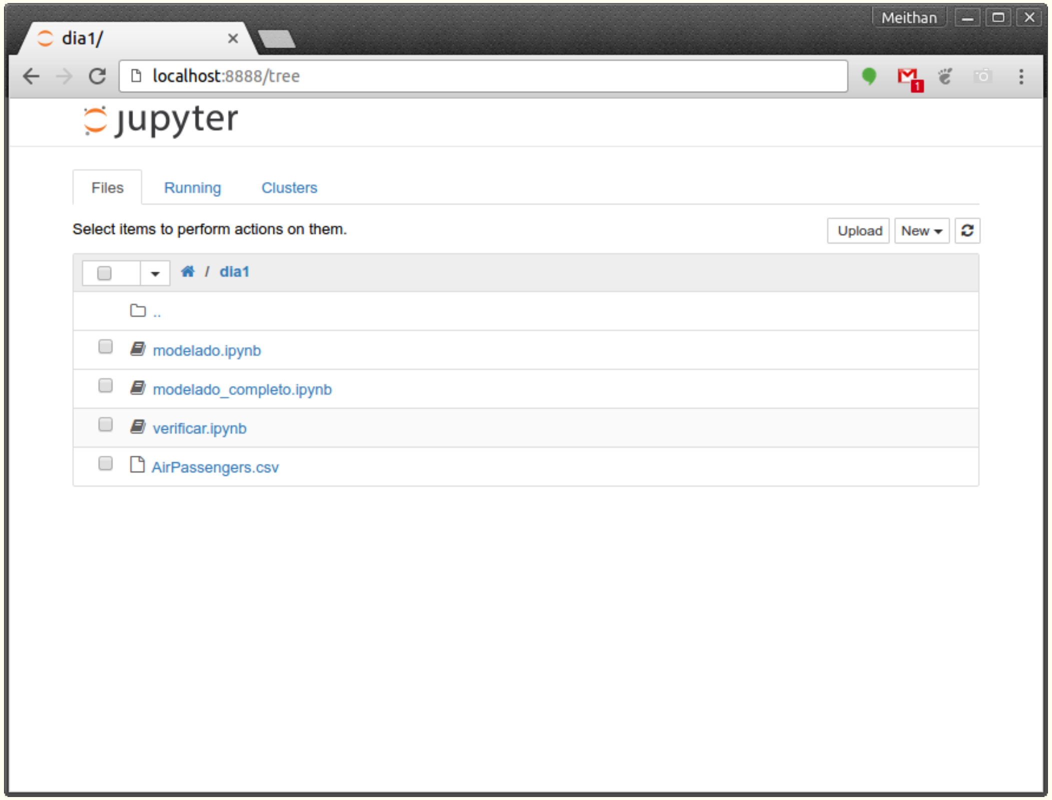
1) Abrir una terminal
(Windows: WIN+R y luego cmd; Mac y Linux: lanzar terminal)

2) Navegar al directorio de trabajo **dia1**

3) Escribir **`jupyter notebook`** y dar ENTER

El Notebook se abrirá automáticamente en el browser predeterminado.

Si se cierra, se puede volver a abrir navegando a **localhost:8888**

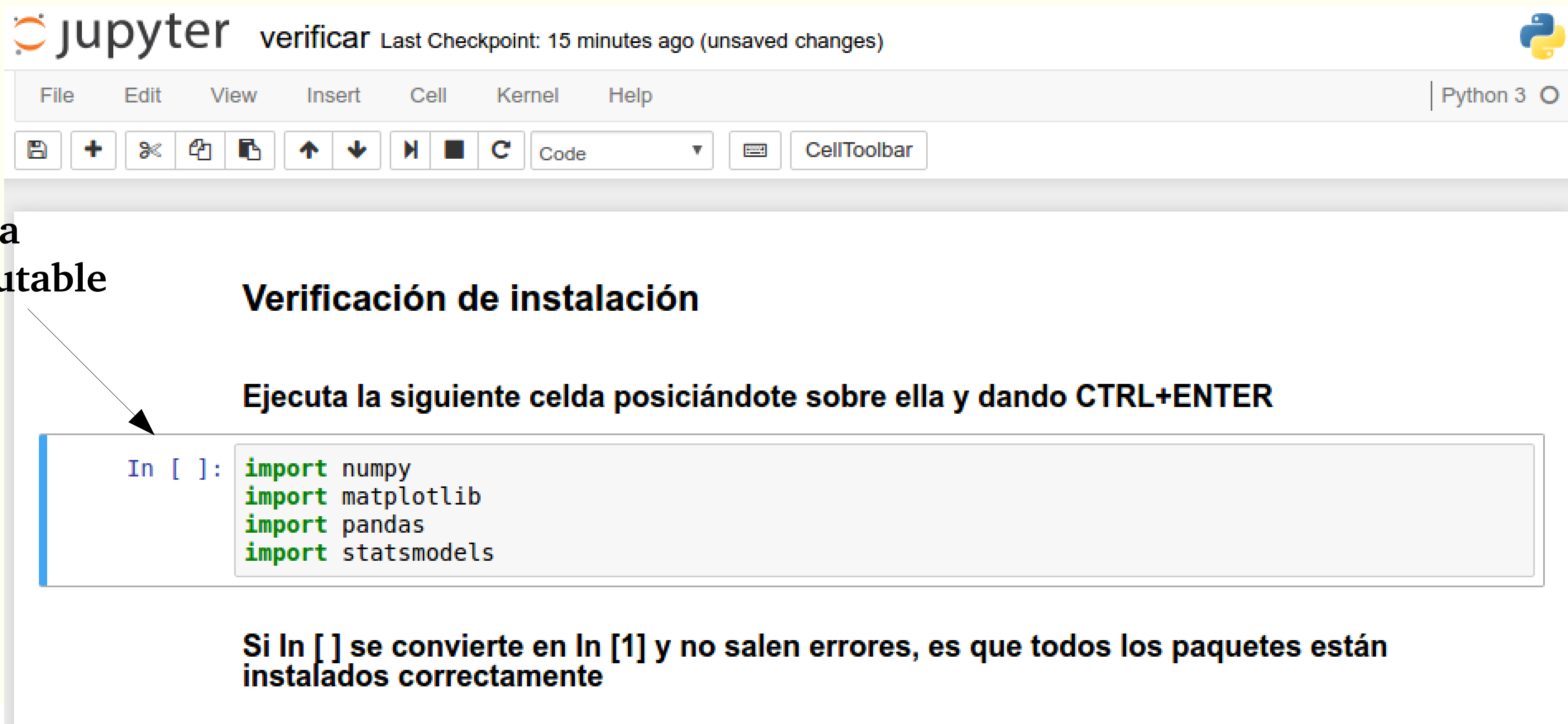


Verificar instalación

Verifiquemos que los paquetes que necesitaremos se instalaron correctamente

- Abrir el notebook **verificar.ipynb**

Celda Ejecutable



Mini tutorial de Python3

- Cerrar el notebook anterior haciendo clic en **File → Close and halt**
- Abrir ahora el notebook **tutorial_python.ipynb**

Más información:

Documentación oficial de Python: https://docs.python.org

Libro gratuito “Python para todos”: http://mundogeek.net/tutorial-python/

Juan C. Toledo (C3)
juan.toledo@nucleares.unam.mx

Introducción a las series de tiempo

➔ **Serie de tiempo**: secuencia de datos experimentales ordenados en el tiempo

Ubicuas: casi todos los sistemas naturales y artificiales están asociados a señales que cambian con el tiempo

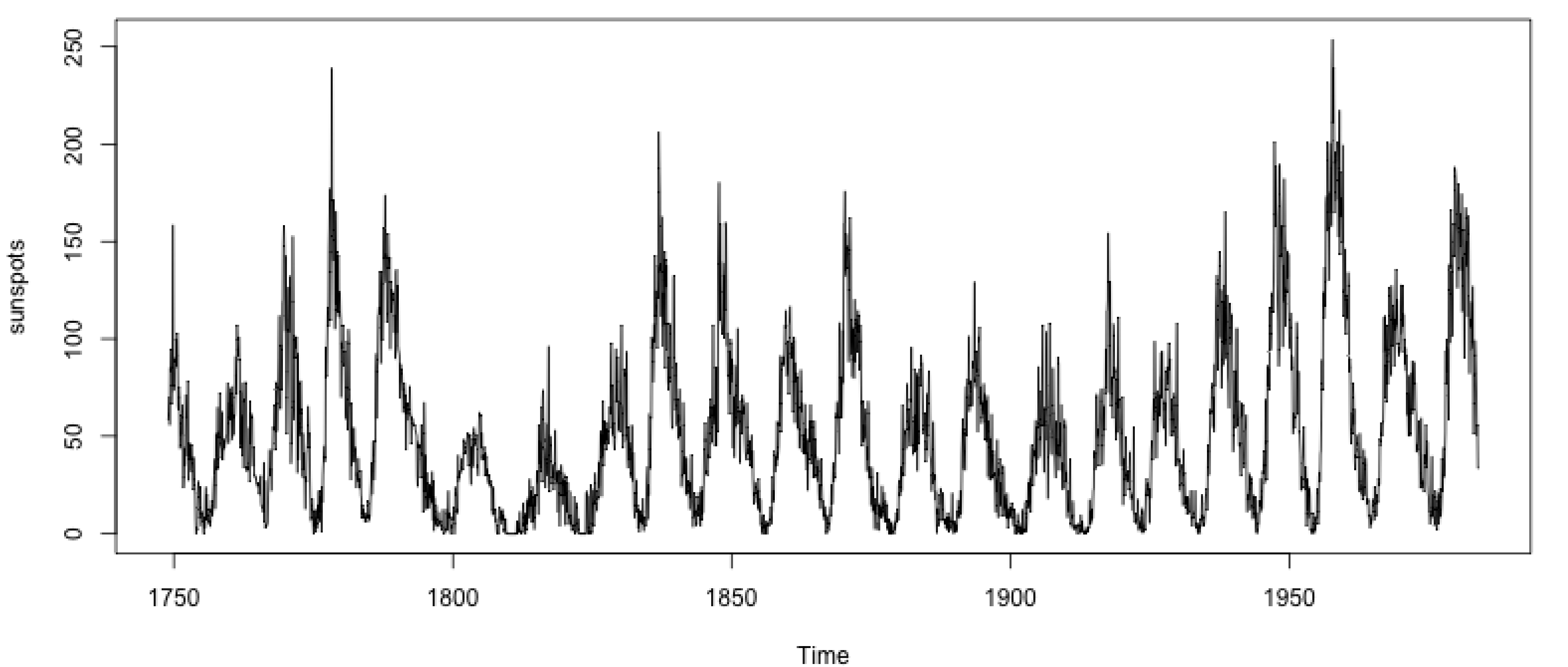
Tasa de cambio USD/MXN, últimos diez años →
(http://www.xe.com/)

Introducción a las series de tiempo

¿En qué se **diferencían** de otros conjuntos de datos?

→ El ordenamiento temporal da cabida a que exista **correlación** entre valores sucesivos: el valor presente puede depender de los valores pasados.

Número de manchas solares desde 1750

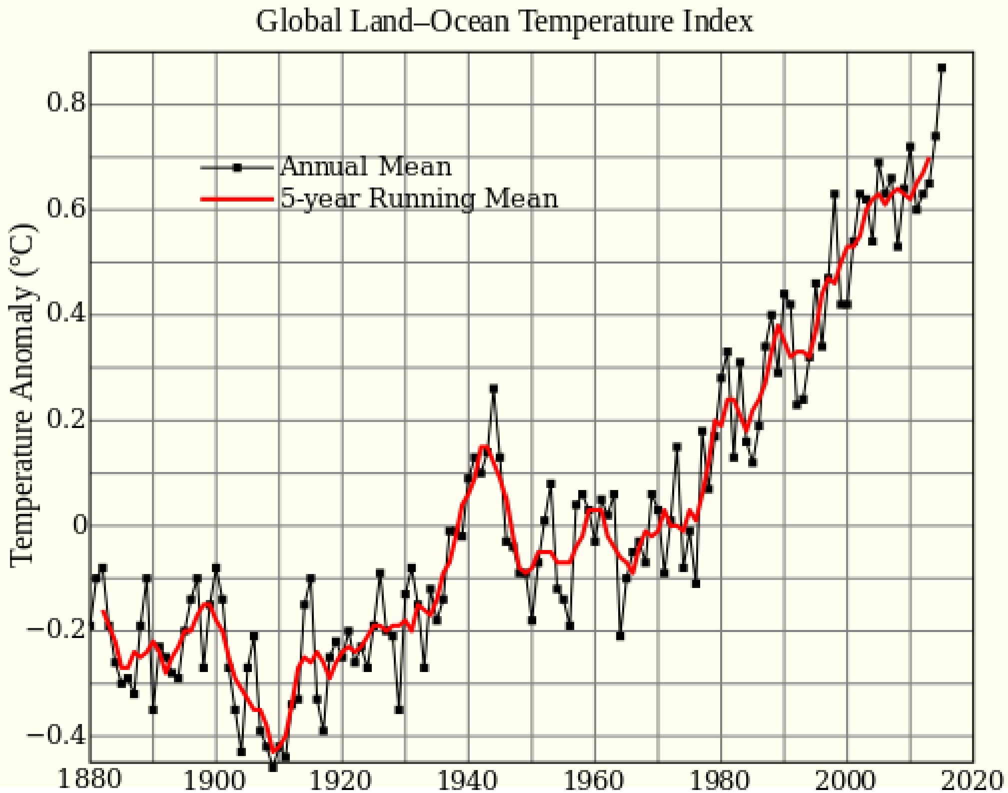


Introducción a las series de tiempo

El **análisis** de las series de tiempo ofrece entonces prospectos interesantes:

- Entender los **mecanismos causales** subyacentes detrás de un fenómeno:

  “¿Por qué está aumentando la temperatura promedio global?”

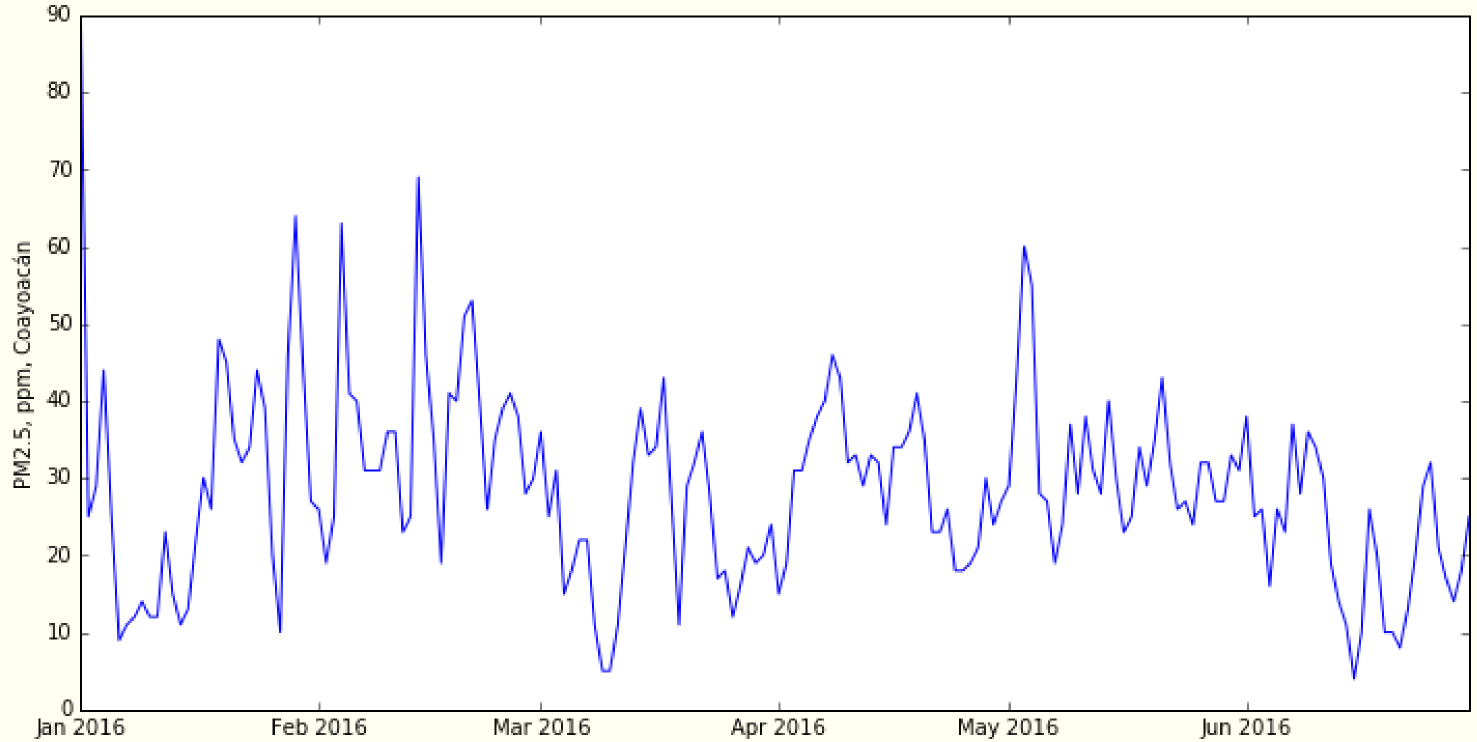


Introducción a las series de tiempo

- Determinar las **relaciones causales** entre dos o más fenómenos:

  "¿Qué impacto tiene el programa Hoy No Circula sobre la contaminación atmosférica en la CDMX?"

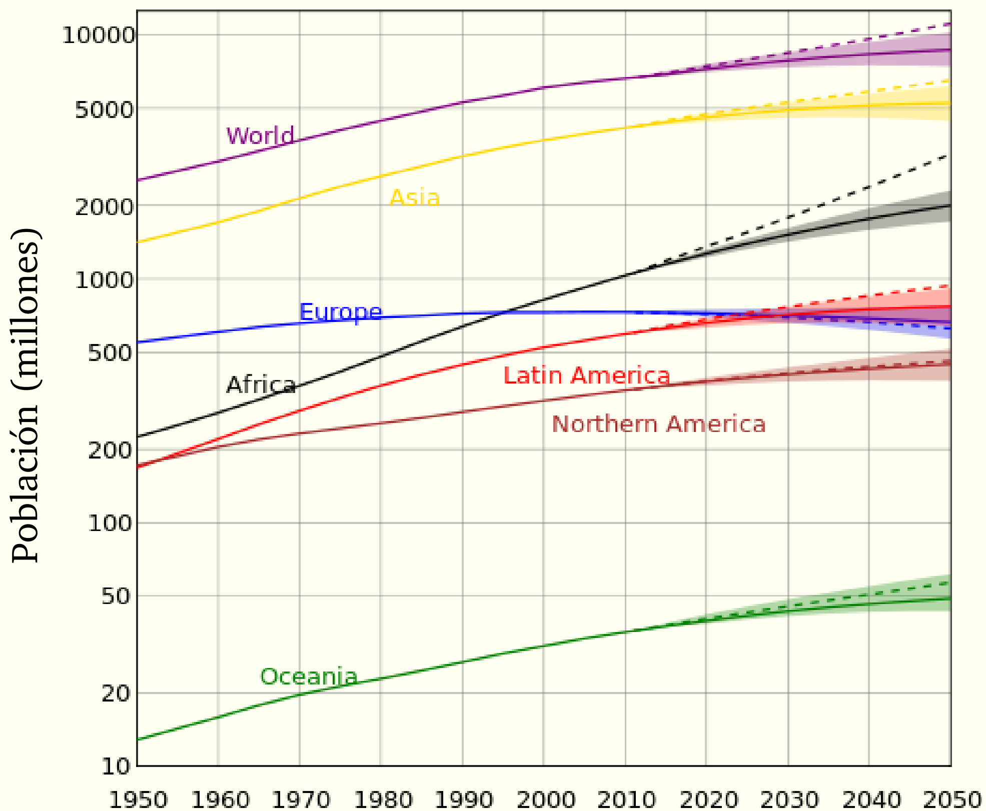
Partículas atmosféricas de 2.5 micras en Coyoacán, 2016



Introducción a las series de tiempo

- Modelar las series nos da una forma de **predecir** el comportamiento **futuro** del fenómeno asociado:

  “¿Cómo crecerá la población mundial de aquí al 2050?”



Modelos y proyecciones poblacionales, ONU, 2007

Análisis Exploratorio

Antes de adentrarse en el análisis matemático …

¡**Graficar** la serie de tiempo!

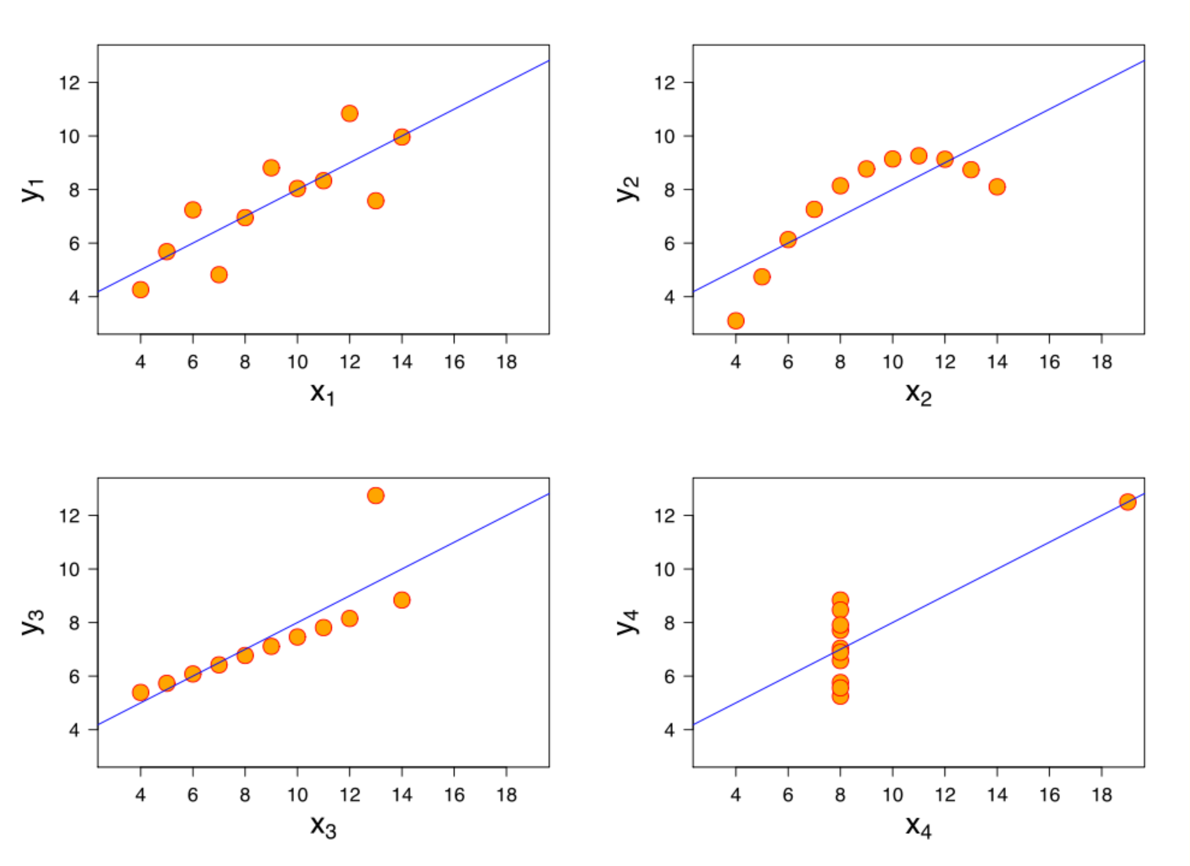
Esto es crucial antes de cualquier tipo de análisis, pues nos permite:

- Descubrir rápidamente las propiedades generales de la serie
- Determinar el tipo de preguntas que podemos contestar
- Seleccionar adecuadamente qué herramientas emplear para modelarla

Ejercicio: abrir **coyoacan.ipynb**

Análisis Exploratorio

La importancia de graficar ...



Anscombe's Quartet

Misma ...

Media (x y y)
Varianza (x y y)
Correlación
Ajuste lineal

Componentes de una serie de tiempo

$$X_t = T_t + S_t + C_t + R_t$$

Tendencia

Incremento o decremento a largo plazo en los datos.

No tiene que ser lineal, y puede cambiar de dirección (aunque lo hace lentamente)

Juan C. Toledo (C3)
juan.toledo@nucleares.unam.mx

Componentes de una serie de tiempo

$$X_t = T_t + S_t + C_t + R_t$$

Tendencia

Incremento o decremento a largo plazo en los datos.

No tiene que ser lineal, y puede cambiar de dirección (aunque lo hace lentamente)

Estacionalidad

Patrones repetitivos con un periodo definido.

Usualmente podemos asociar esta repetibilidad a un fenómeno (e.g. las estaciones del año)

Componentes de una serie de tiempo

$$X_t = T_t + S_t + C_t + R_t$$

Tendencia

Incremento o decremento a largo plazo en los datos.

No tiene que ser lineal, y puede cambiar de dirección (aunque lo hace lentamente)

Estacionalidad

Patrones repetitivos con un periodo definido.

Usualmente podemos asociar esta repetibilidad a un fenómeno (e.g. las estaciones del año)

Ciclicidad

Cambios cíclicos sin un periodo definido.

No podemos identificar un periodo claro para esta variabilidad. Usualmente es de más largo plazo que las variaciones estacionales.

Juan C. Toledo (C3)
juan.toledo@nucleares.unam.mx

Componentes de una serie de tiempo

Residuo

$$X_t = T_t + S_t + C_t + R_t$$

Fluctuaciones irregulares e impredicibles.

Lo que queda después de quitar las anteriores.

Tendencia

Incremento o decremento a largo plazo en los datos.

No tiene que ser lineal, y puede cambiar de dirección (aunque lo hace lentamente)

Estacionalidad

Patrones repetitivos con un periodo definido.

Usualmente podemos asociar esta repetibilidad a un fenómeno (e.g. las estaciones del año)

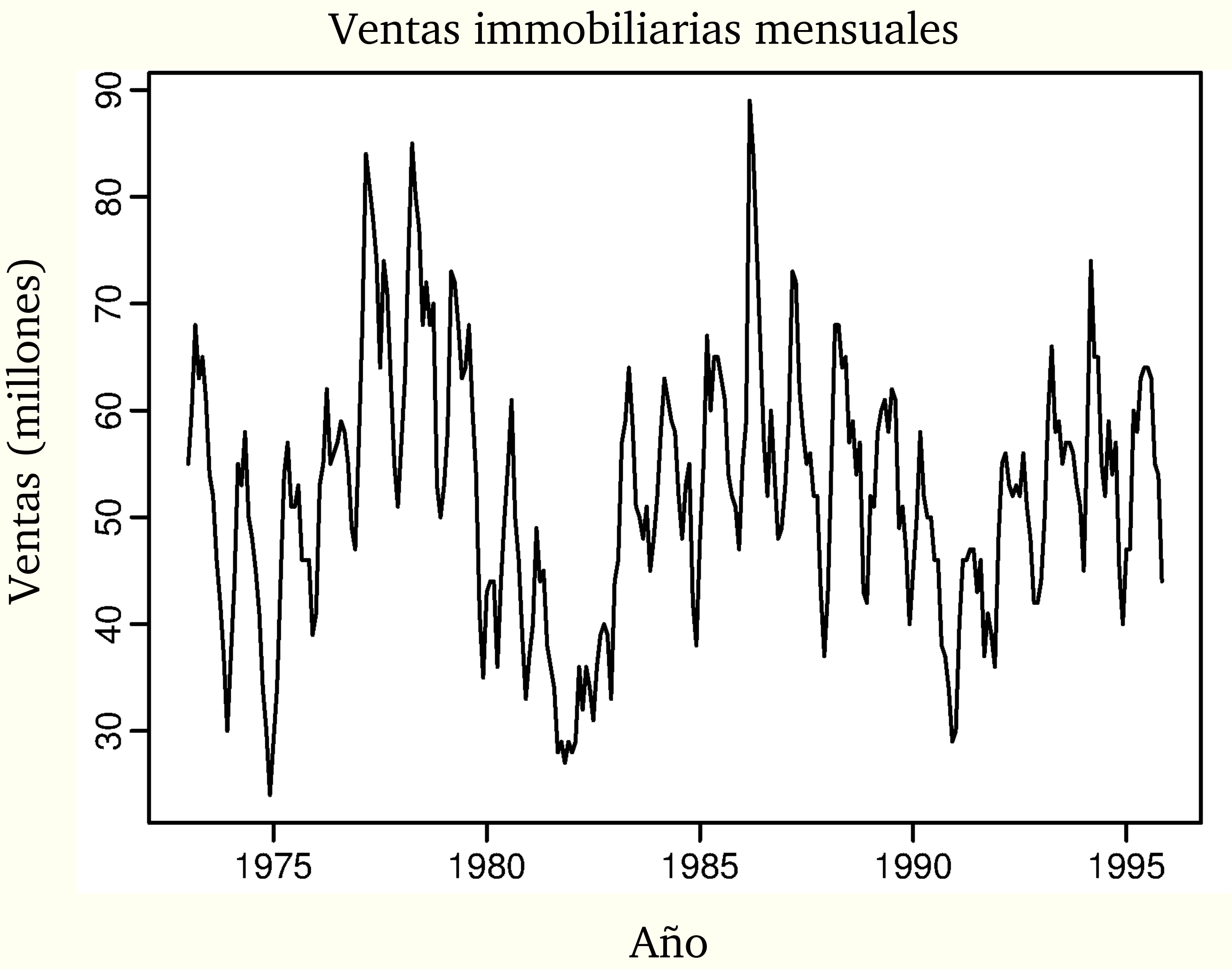
Ciclicidad

Cambios cíclicos sin un periodo definido.

No podemos identificar un periodo claro para esta variabilidad. Usualmente es de más largo plazo que las variaciones estacionales.

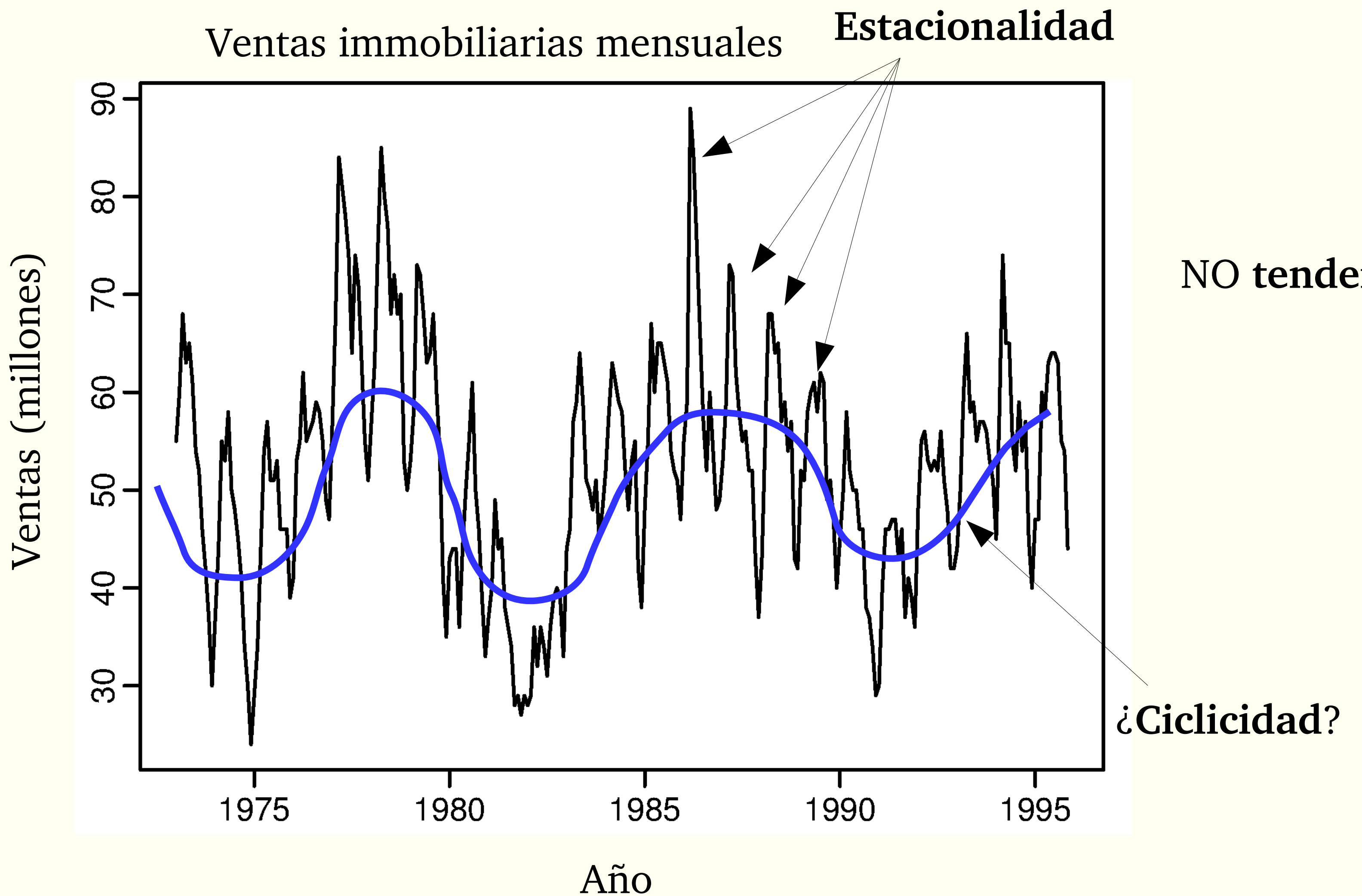
Juan C. Toledo (C3)
juan.toledo@nucleares.unam.mx

Ejemplos



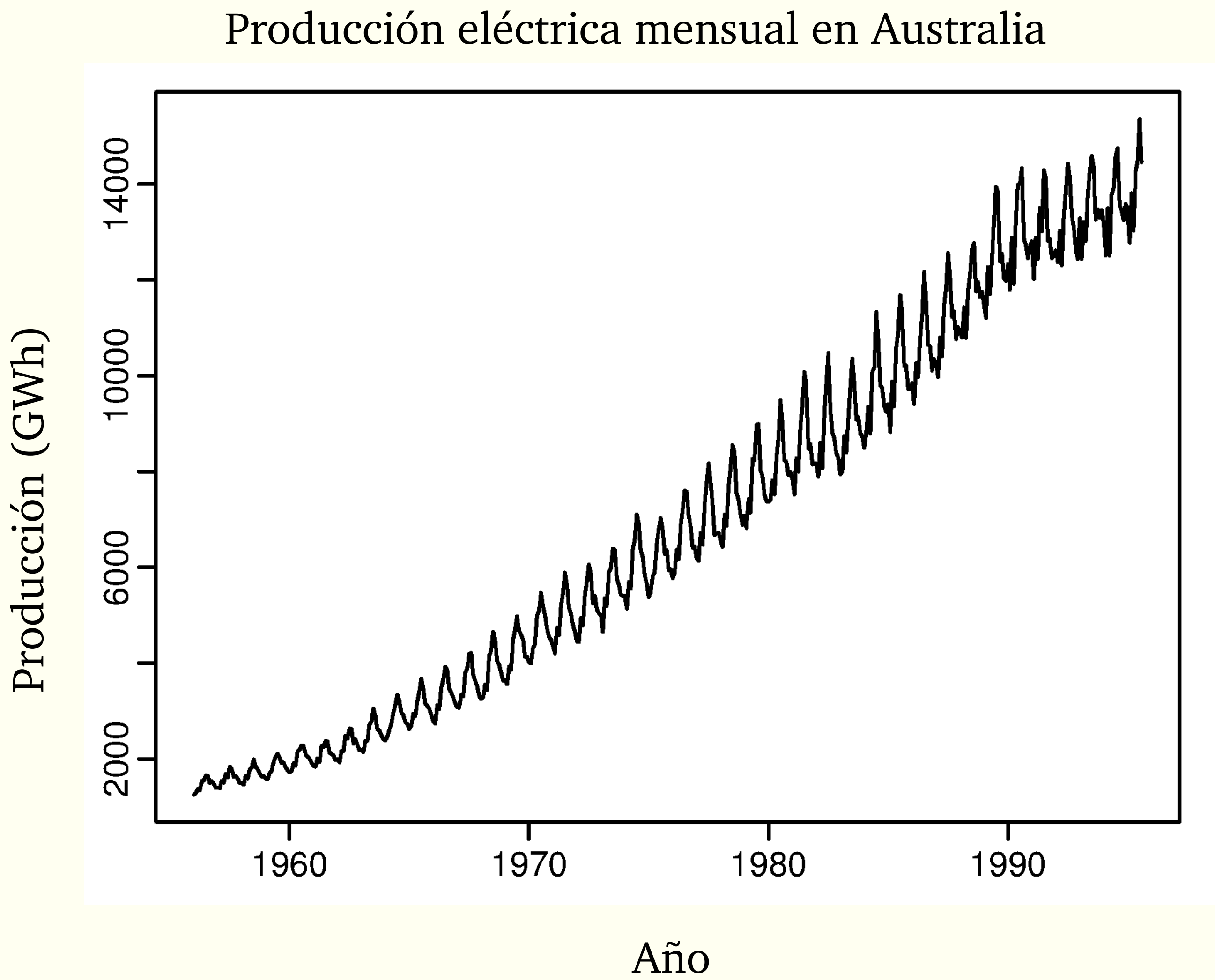
Ventas immobiliarias mensuales
Ventas (millones)
90
80
70
60
50
40
30
1975
1980
1985
1990
1995
Año

Ejemplos



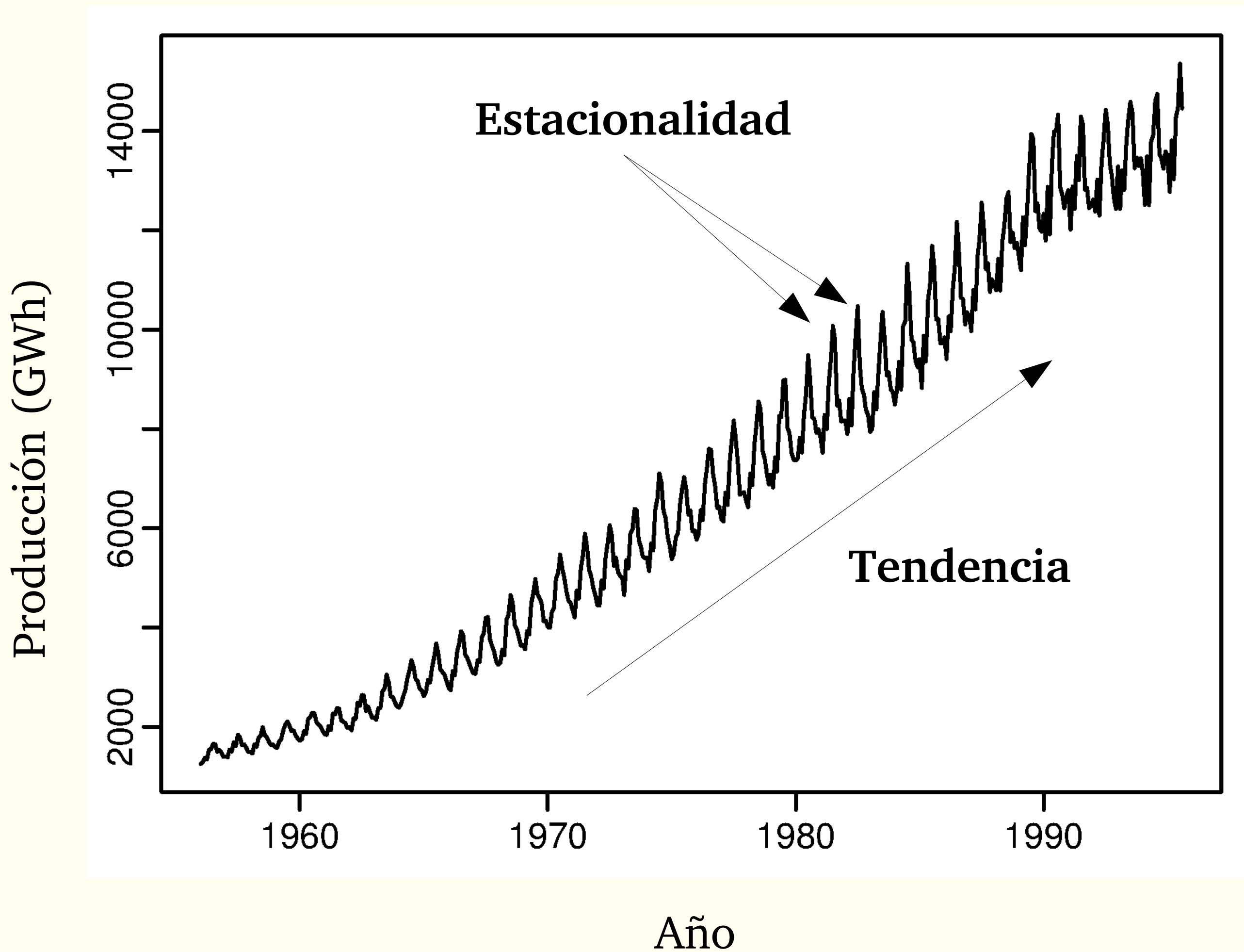
NO **tendencia**

Ejemplos


Producción eléctrica mensual en Australia
Producción (GWh)
14000
10000
6000
2000
1960
1970
1980
1990
Año

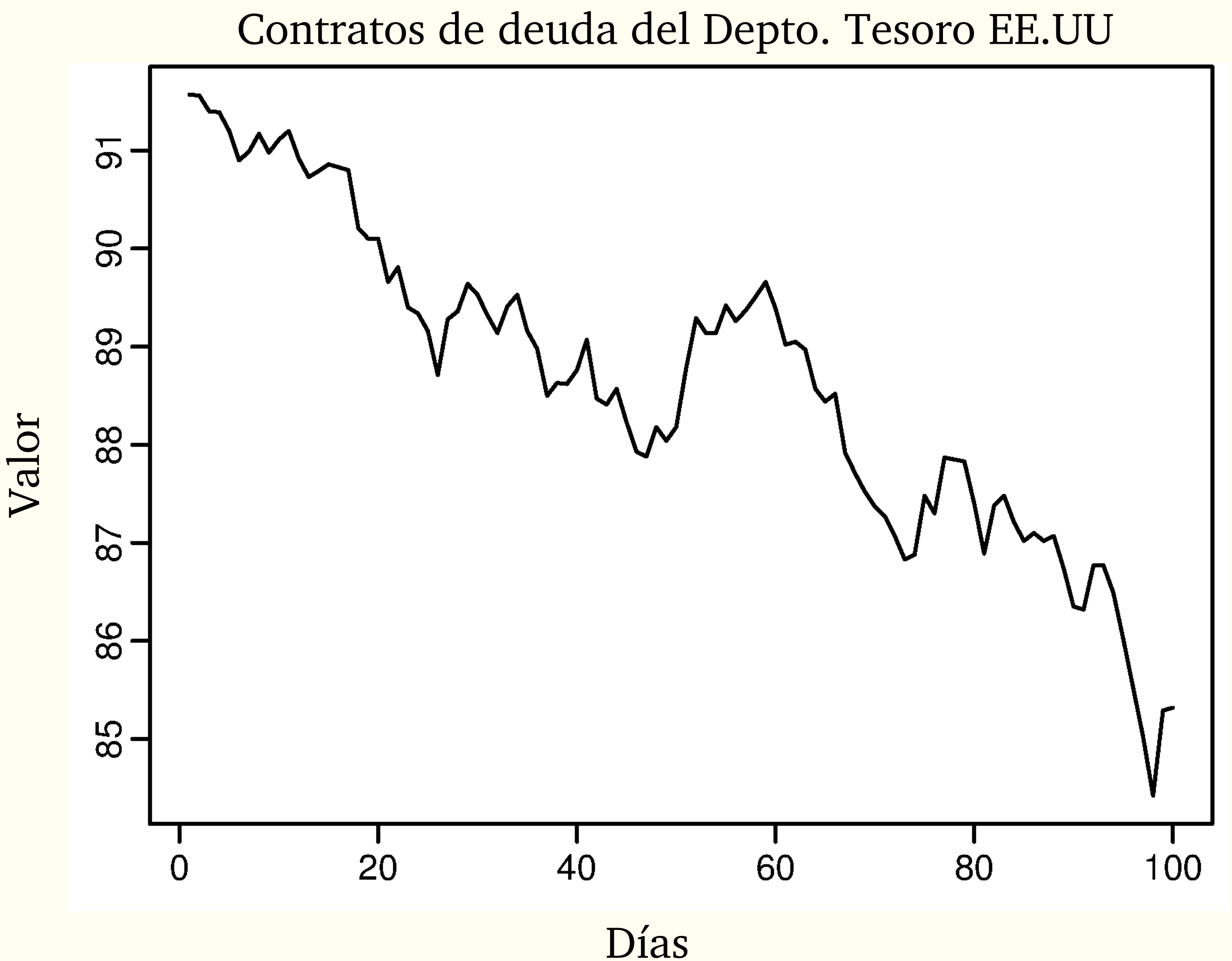
Ejemplos

Producción eléctrica mensual en Australia



¿NO **ciclicidad**?

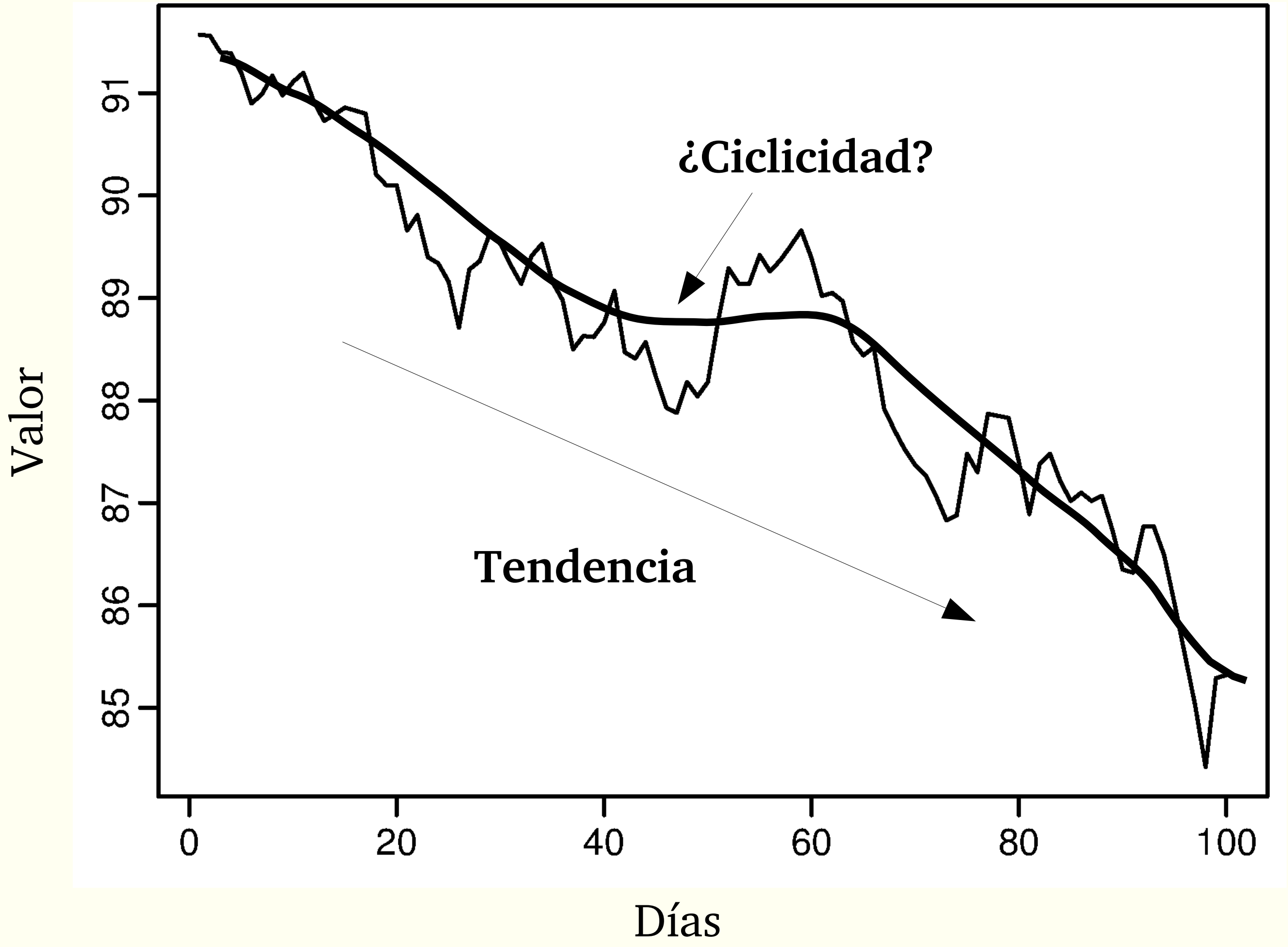
Ejemplos



Contratos de deuda del Depto. Tesoro EE.UU
Valor
91
90
89
88
87
86
85
0
20
40
60
80
100
Días

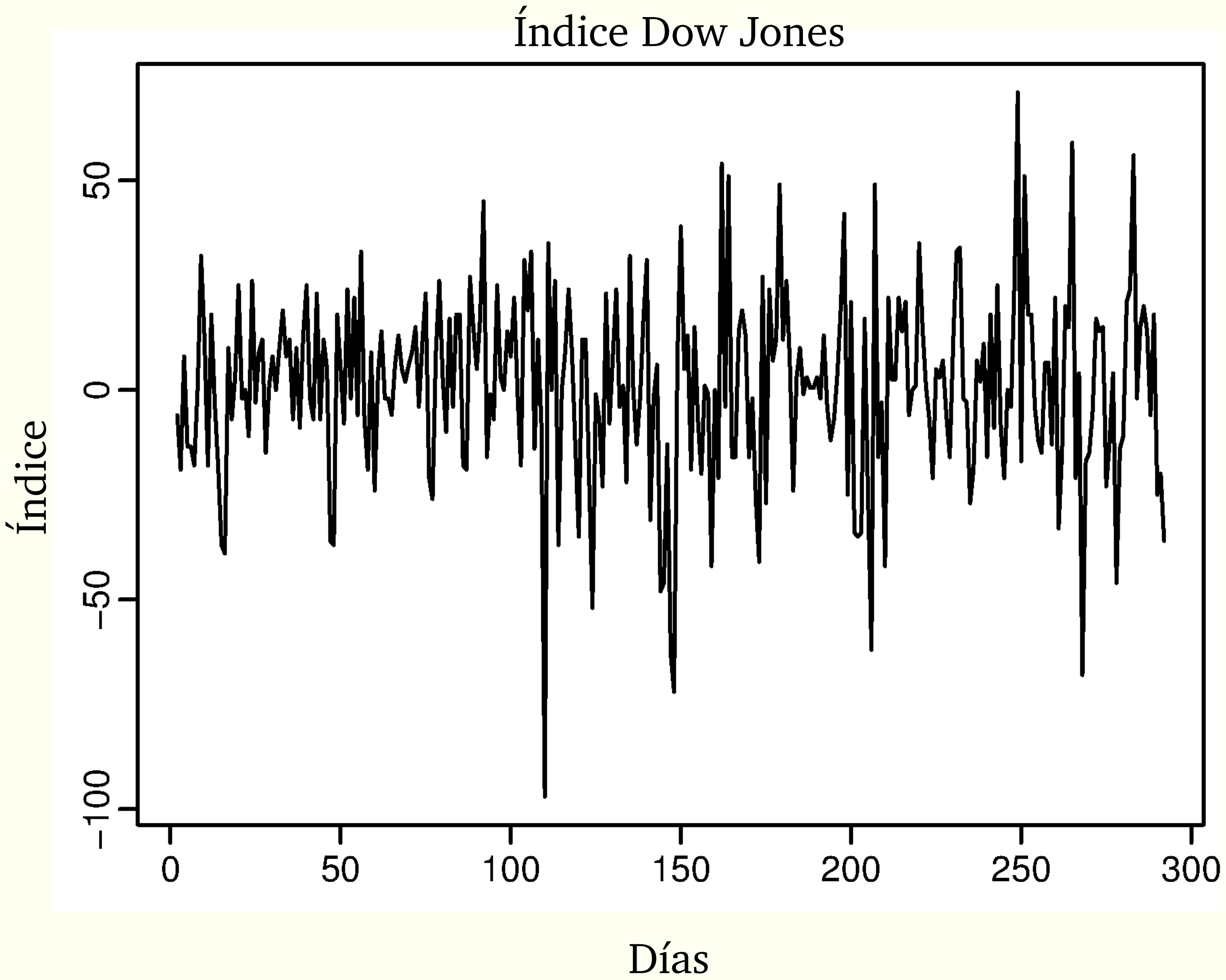
Ejemplos

Contratos de deuda del Depto. Tesoro EE.UU



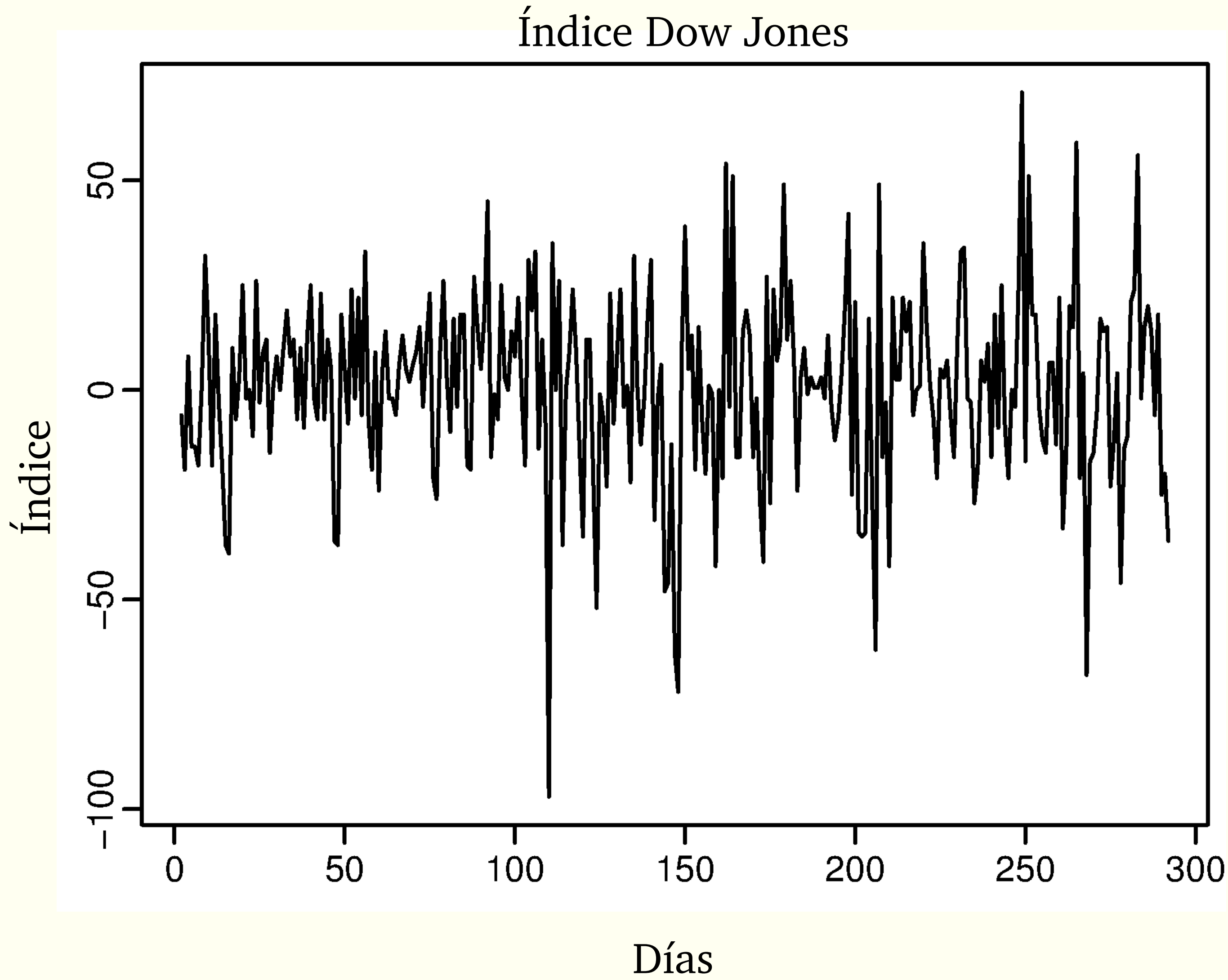
NO **estacionalidad**

Ejemplos



Índice Dow Jones
Índice
50
0
−50
−100
0
50
100
150
200
250
300
Días

Ejemplos



NO **tendencia**

NO **estacionalidad**

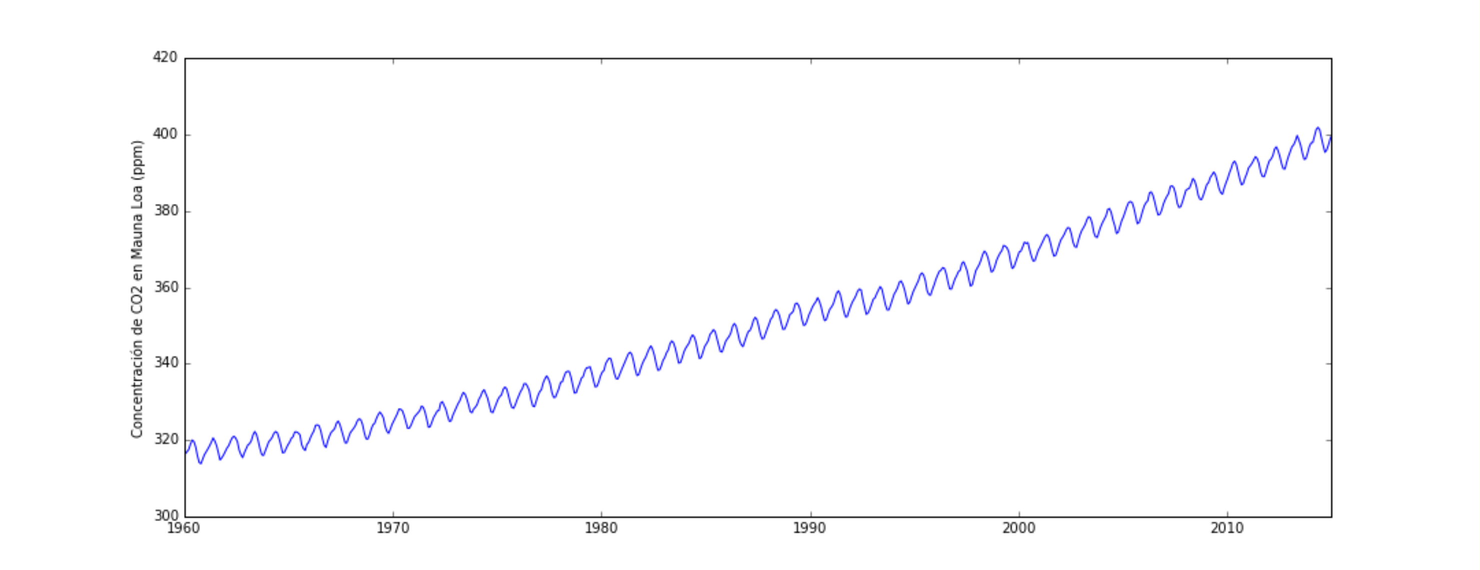
NO **ciclicidad**

Ajustando la tendencia

La manera más sencilla de modelar la tendencia, puesto que cambia lentamente, es usando un **ajuste de curva**.

La función **curve_fit()**, de scipy.optimize, permite hacer ajustes por mínimos cuadrados (no necesariamente lineal) de funciones a datos.

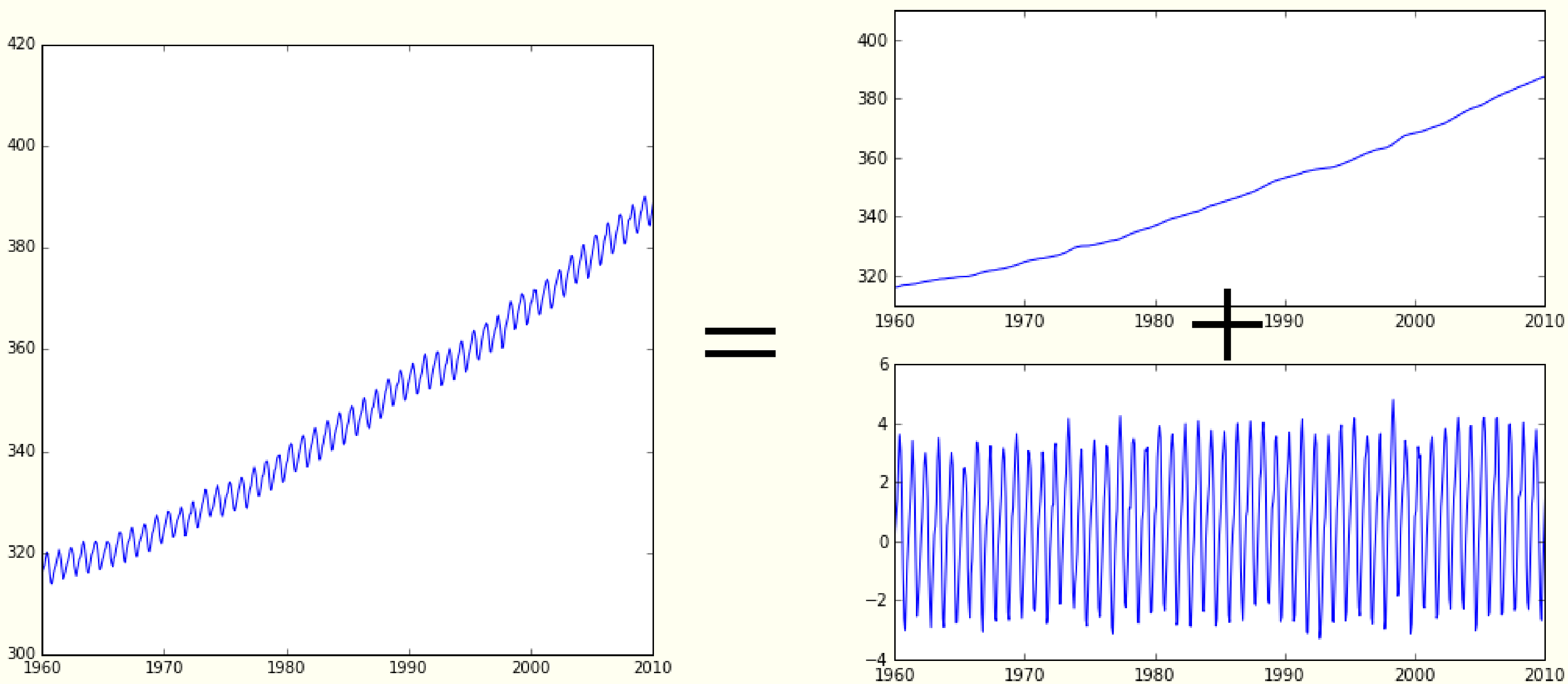
Ejercicio: CO_2 atmosférico en Mauna loa
→ primerta parte de **CO2.ipynb.**



Suavizado de series de tiempo

Las modelos matemáticos no siempre se ajustan bien a las series de tiempo reales. Otra técnica para extraer tendencia, muy simple y bastante efectiva, es el **suavizado**.

Esto elimina la variabilidad de alta frecuencia y permite separar la tendencia + ciclicidad de las demás componentes.



Promedio Móvil Simple

La manera más sencilla de suavizar es **promediando**.

Para cada valor X_t de la serie de tiempo, calculamos:

N-1 valores anteriores

$$M_t = \frac{X_t + X_{t+1} + \cdots + X_{t-N+1}}{N}$$

Promedio móvil simple de *N* puntos

Promedio Móvil Pesado

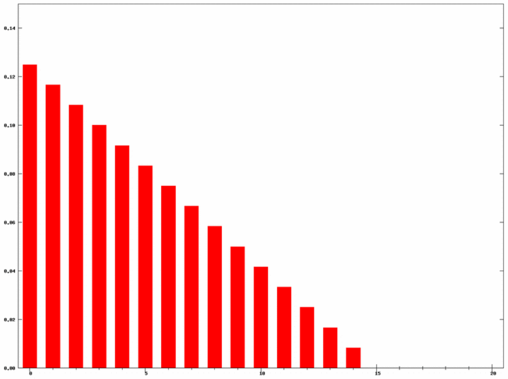
El promedio móvil simple se puede entender como un promedio en el que se da el **mismo peso** a los *N-1* valores anteriores.

$$M_t = \frac{1}{\sum w_i} \sum_{i=0}^{N-1} w_i X_{t-i}$$

Promedio pesado de *N* puntos

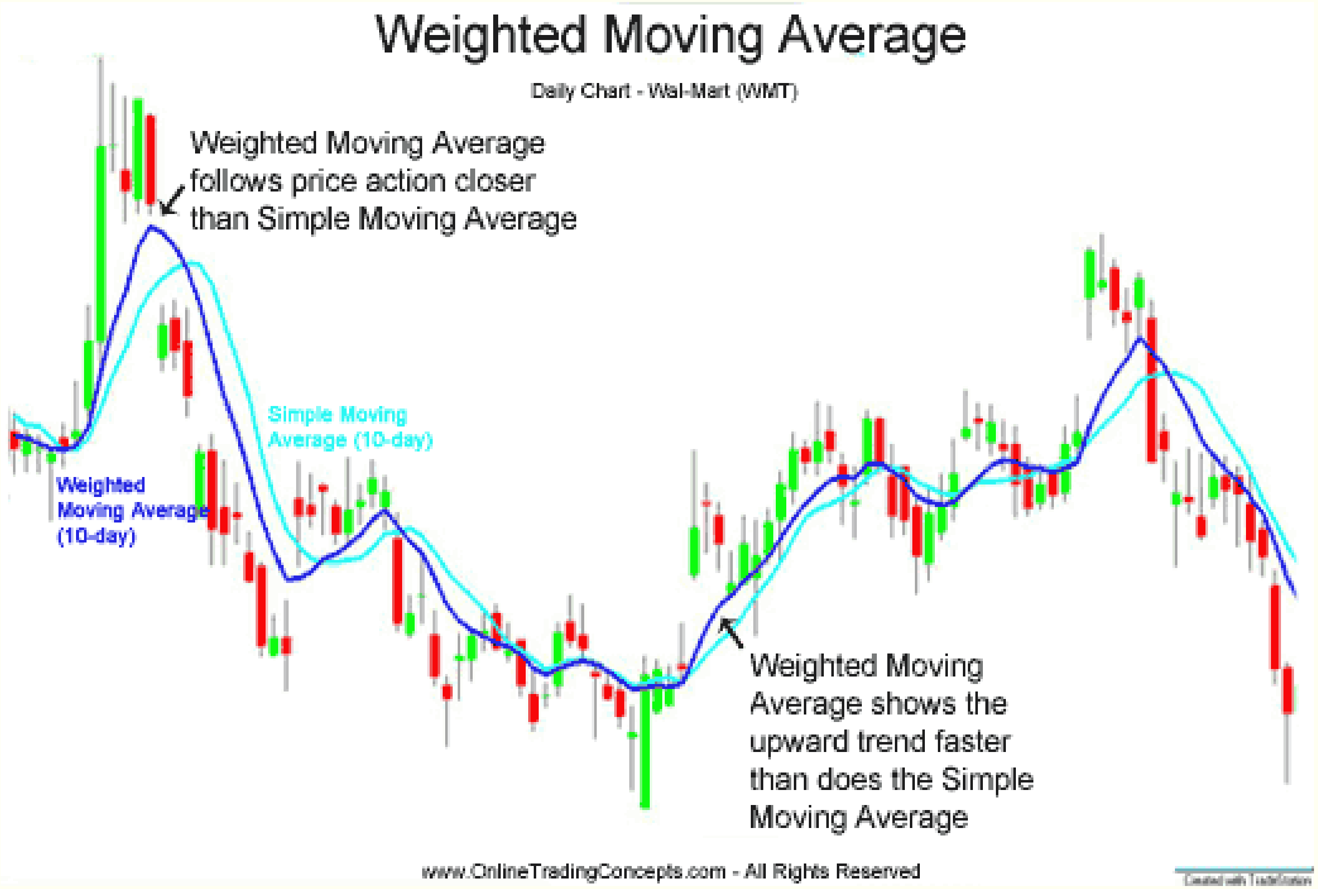
Pesos

Una aplicación común es darle pesos *decrecientes* a los valores entre más lejos estén en el pasado.



Promedio Móvil Pesado

Esto permite que el promedio móvil responda más rápido en cambios súbitos de la serie:



Promedio Móvil Exponencial

Los promedios móviles anteriores (simple o pesado) tienen un **alcance finito** en el tiempo: “olvidan” el pasado más allá de cierta distancia temporal.

Este promedio asigna un peso que decrece exponencialmente, pero nunca se vuelve cero, a los valores pasado.

Se define recursivamente:

$$S_1 = X_1$$

$$S_t = \alpha X_t + (1-\alpha) S_{t-1}$$

“Presente”

Promedio anterior

Factor de decaimiento

$$0 < \alpha < 1$$

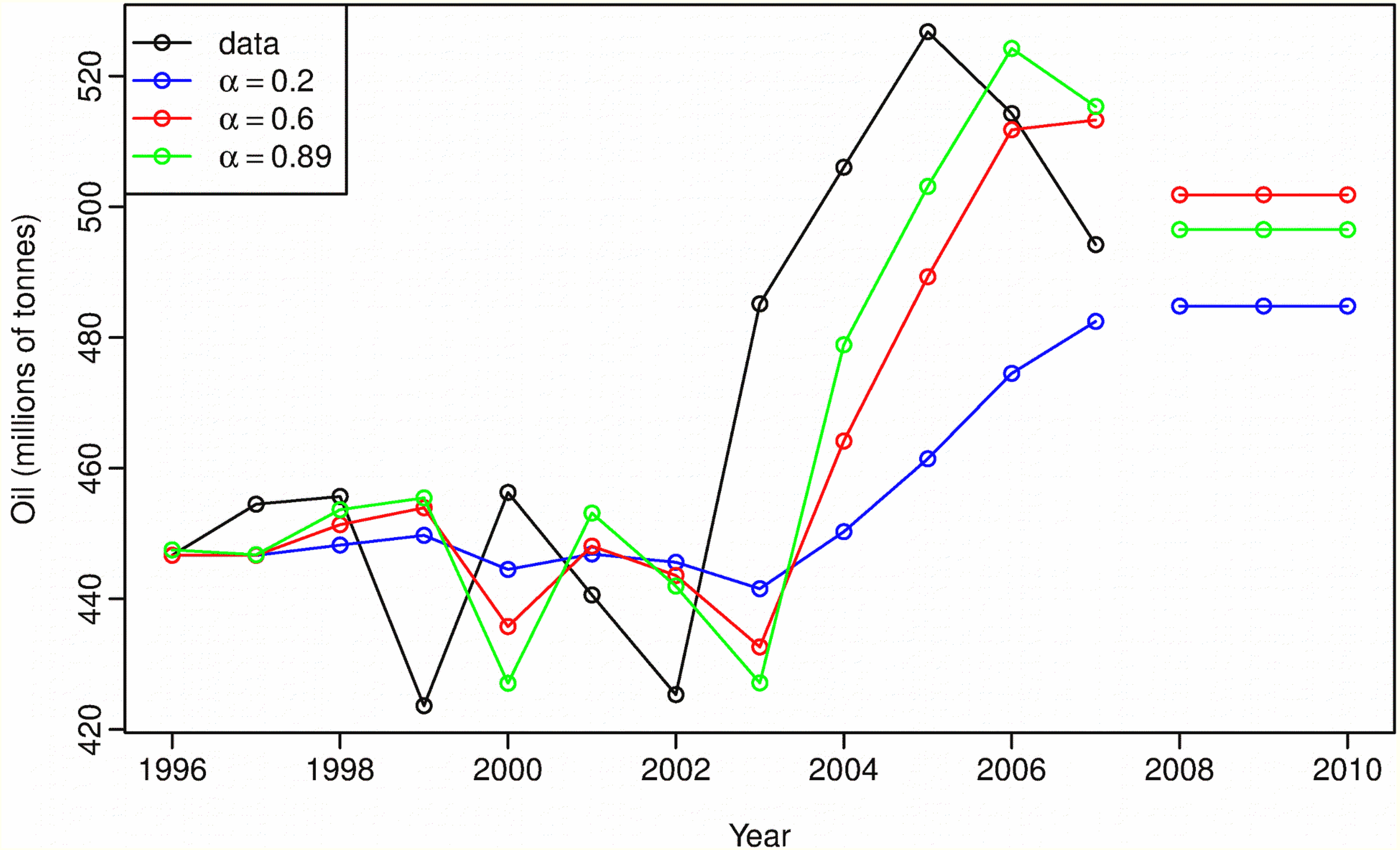
Promedio Móvil Exponencial

Aplicando la regla recursiva un par de veces, se ve que:

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \alpha X_2 + (1-\alpha) S_1 \\
&= \alpha X_2 + (1-\alpha) X_1 \\
S_3 &= \alpha X_3 + (1-\alpha) S_2 \\
&= \alpha X_3 + \alpha(1-\alpha) X_2 + (1-\alpha)^2 X_1 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Factores que van decreciendo exponencialmente

Promedio Móvil Exponencial



Suavizado de series de tiempo

Continuar con la segunda parte del notebook **CO2.ipynb.**

Juan C. Toledo (C3)
juan.toledo@nucleares.unam.mx

Estacionariedad

Las series de tiempo se pueden entender como **procesos estocásticos** (es decir, fundamentalmente aleatorios).

Decimos que un proceso es **estacionario** cuando **sus propiedades estadísticas no cambian con el tiempo**.

Esto es útil pues nos permite hacer predicciones estadísticas sobre su comportamiento.

En concreto, una serie se puede ver como un proceso estacionario si:

1) Su media es constante en el tiempo, es decir, no tiene tendencia;

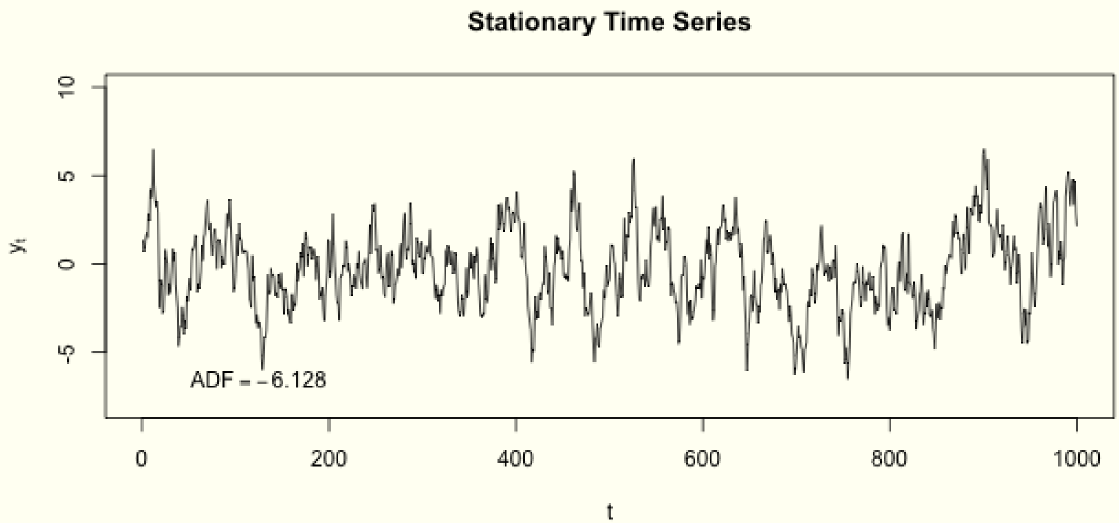
2) Su varianza es constante en el tiempo;

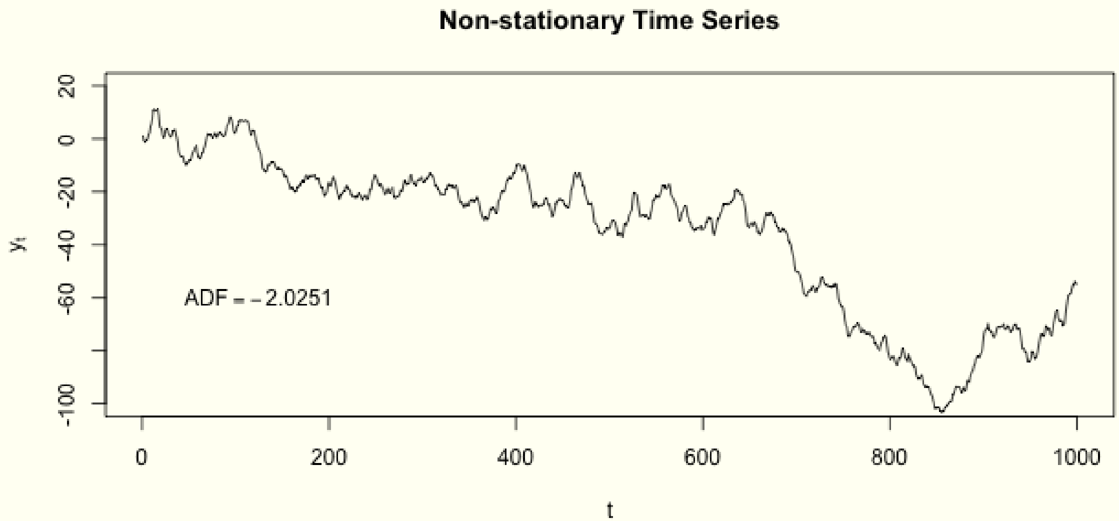
3) Su estructura de autocorrelación es constante en el tiempo.

En la práctica, ¡las series de tiempo casi nunca son estacionarias!

Juan C. Toledo (C3)
juan.toledo@nucleares.unam.mx

Estacionariedad





Autocorrelación

¿Cómo determinamos si una serie es estacionaria?

Las primeras dos condiciones (media y desviación estándar constantes) son fáciles de medir:

→ calculamos la media móvil y la desviación estándar móvil, y vemos si permanecen aprox. constantes.

Pero debemos también medir "la estructura de autocorrelación" …

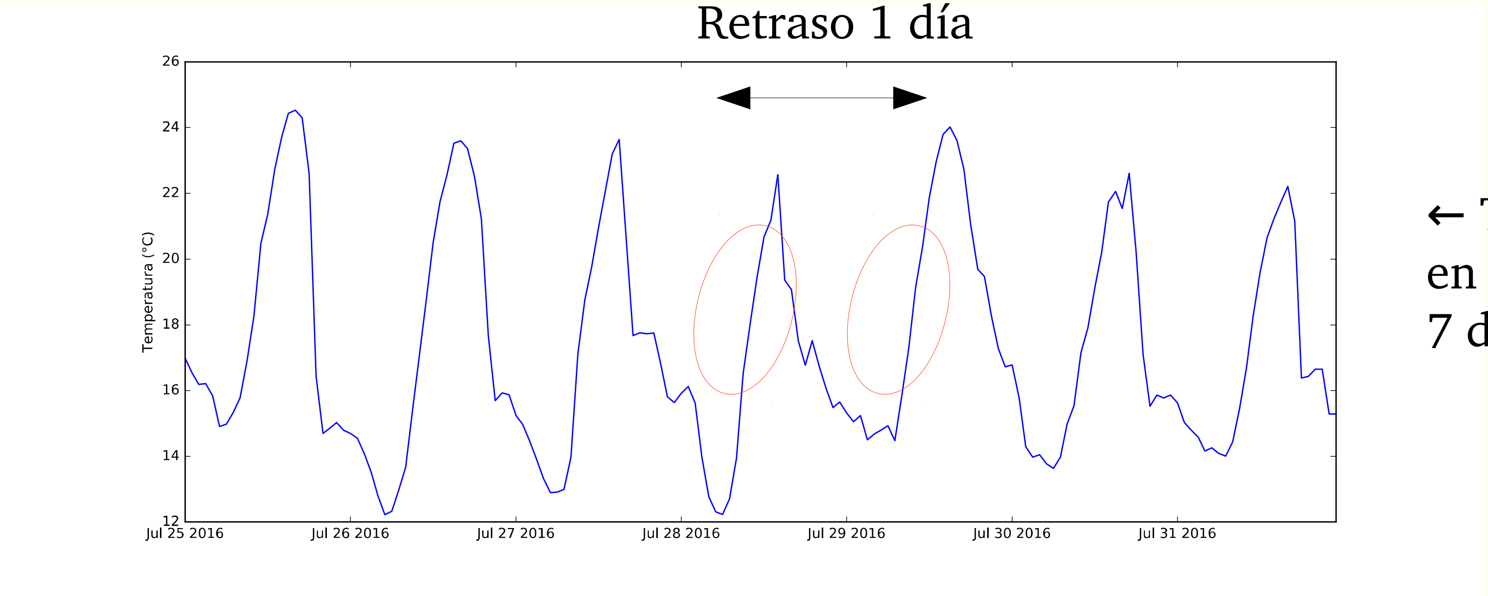
¿Qué es la autocorrelación?

Autocorrelación

En términos simples, nos dice si la serie de tiempo **se parece a sí misma**, en términos estadísticos, **cuando se le retrasa** en el tiempo.

En otras palabras, indica qué tanto **depende** (linealmente) lo qué pasará con los valores en un momento dado de lo que pasaba con ellos en un **tiempo anterior**.

Se entiende que es una medida de "memoria" del proceso subyacente, y es por esto que es una buena herramienta para juzgar aleatoriedad y estacionariedad.



← Temperatura en CU últimos 7 días

Juan C. Toledo (C3)
juan.toledo@nucleares.unam.mx

Autocorrelación

La **función de autocorrelación (ACF)** de la serie X_t para el *retraso* **τ** se define como:

$$ACF(\tau) = \frac{1}{(n-\tau)\sigma^2} \sum_{t=1}^{n-\tau} (X_t - \mu)(X_{t+\tau} - \mu)$$

Media

Retraso

Longitud de la serie

Varianza

Serie desfasada en **τ**

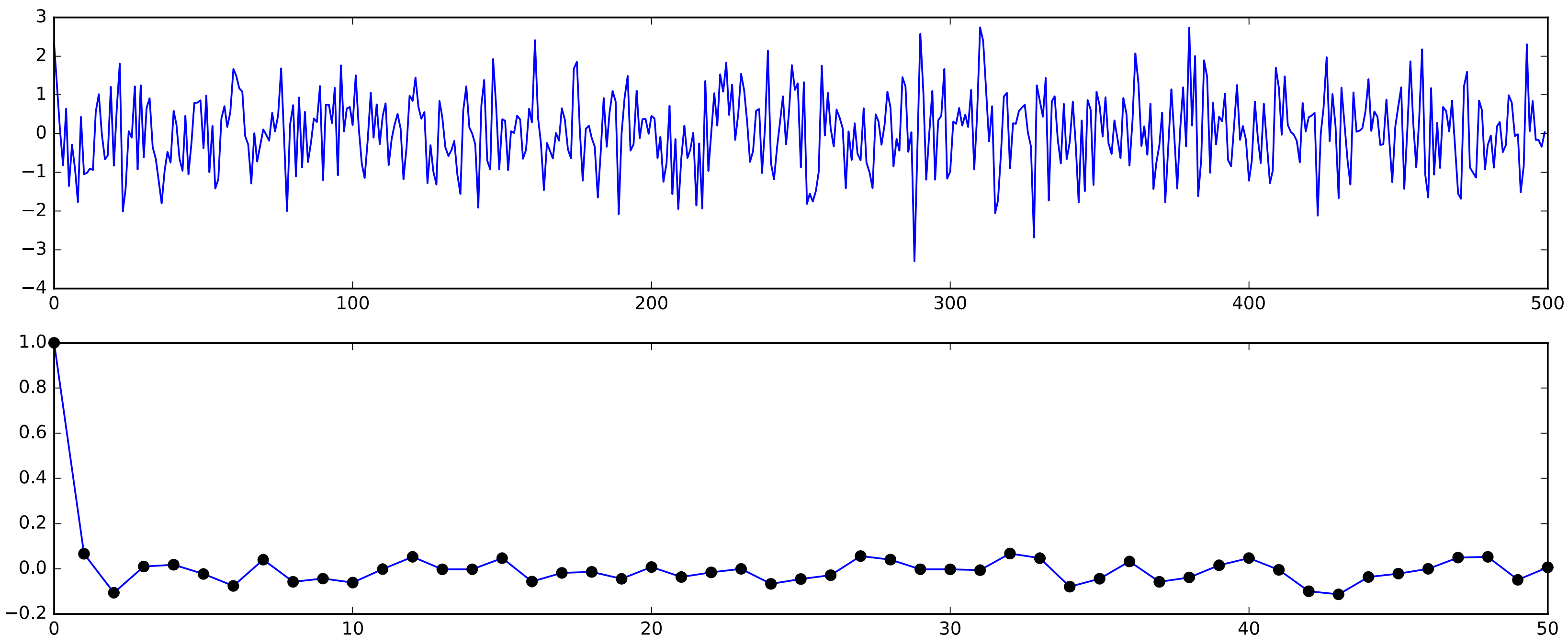
Si **τ**=0,

$$ACF(0) = \frac{1}{\sigma^2} \times \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (X_t - \mu)^2 = 1$$

… naturalmente.

Autocorrelación

La función de autocorrelación (ACF) de una serie aleatoria:



Autocorrelación Parcial

Una cantidad relacionada a la autocorrelación es la función de **autocorrelación parcial (PACF).**

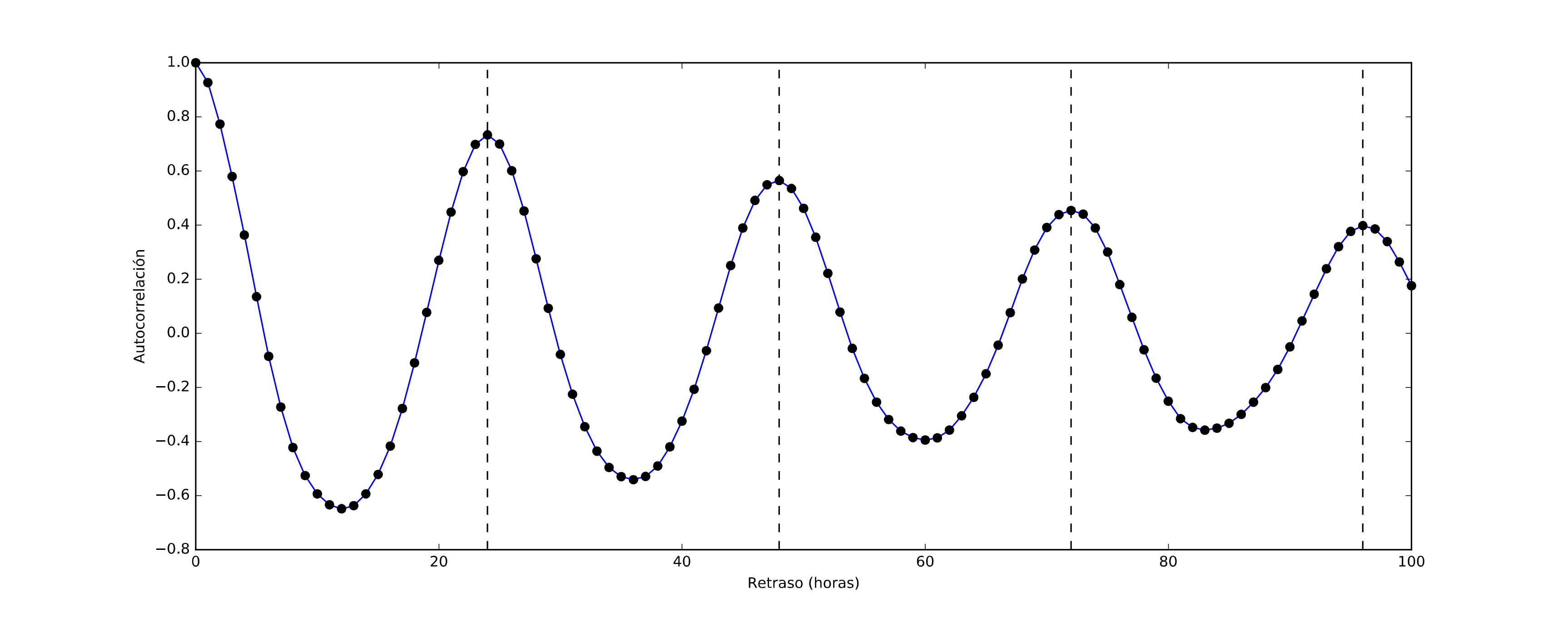
En términos simples, es una forma de la función de autocorrelación que "descuenta" el efecto de los valores intermedios que hay entre el valor actual y el valor retrasado.

Calcularla no es tan sencillo → puesto que es una herramienta común, la mayoría de las librerías incluyen una función para hacerlo (statsmodel tiene pacf()).

Juan C. Toledo (C3)
juan.toledo@nucleares.unam.mx

ACF y PACF

Ejercicio: **temperatura.ipynb**



Modelos de procesos estocásticos

Estos modelos representan un **enfoque alternativo**, y **complementario**, a los modelos que hemos visto.

Mientras hasta el momento nos hemos centrado en modelar los términos de tendencia, ciclicidad y estacionalidad de la serie, otro enfoque es modelar la **variabilidad estocástica** de la serie (a través de la autocorrelación).

Existen varios modelos para la parte estocástica de una serie de tiempo:

- Modelos Autoregresivos (AR)
- Modelos de Media Móvil (MA)
- Modelos generalizados: ARMA y ARIMA

Juan C. Toledo (C3)
juan.toledo@nucleares.unam.mx

Modelo AR

El modelo **a**uto**r**egresivo establece que el valor actual de la serie de tiempo es una regresión lineal que depende de los valores **anteriores** y de un término de **ruido** estocástico

Definimos el modelo autoregresivo de **orden *p***, AR(p), como:

$$X_t = c + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

parámetros
(a ajustar)

ruido o error
(aleatorio)

Modelo AR

El modelo autoregresivo de orden cero, AR(0), es simplemente ruido:

$$X_t = c + \varepsilon_t$$

El modelo autoregresivo de orden 1, AR(1), es

$$X_t = c + \varphi X_{t-i} + \varepsilon_t$$

Es estacionario si $|\varphi| < 1$.

Los efectos del término de ruido al tiempo t contribuyen infinitamente lejos en el futuro, aunque con un efecto decreciente.

Juan C. Toledo (C3)
juan.toledo@nucleares.unam.mx

Modelo AR

Modelo MA

El modelo de media móvil (**m**oving **a**verage), en cambio, modela una serie de tiempo como una media móvil sobre los términos de ruido.

Definimos el modelo de media móvil de **orden *q***, MA(q), como:

$$X_t = c + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

ruido actual

parámetros
(a ajustar)

ruido reciente

En cierto sentido, dice que el valor actual de la serie de tiempo depende solamente de un promedio pesado de los términos de **ruido** recientes.

Juan C. Toledo (C3)
juan.toledo@nucleares.unam.mx

La prueba de Dickey-Fuller

Es una **prueba de hipótesis** de **estacionariedad**.

Se fundamenta de comparar la serie con en el modelo AR(1),

$$X_t = c + \varphi X_{t-i} + \varepsilon_t$$

el cual es estacionario sólo si $|\varphi| < 1$.

Hipótesis Nula: $\varphi = 1$, es decir, la serie **no** es estacionaria.

1) Genenerar la estadística de prueba, t.

2) Obtener el valor crítico c tabulado de acuerdo al nivel de confianza deseado.

3) Si $t < c$, rechazamos la hipótesis nula → sugiere que la serie **es** estacionaria.

Modelo ARIMA

Finalmente, los modelos AR y MA pueden ser unificados y generalizados en el modelo **ARIMA**: **A**uto**R**egressive **I**ntegrated **M**oving **A**verage.

Receta de **Box & Jenkins** para obtener un modelo ARIMA(p,d,q):

1) Diferenciar la serie (i.e. tomando las diferencias entre valores vecinos) d veces hasta que la serie sea aproximadamente estacionaria (e.g. Dickey-Fuller).

2) Determinar los órdenes p y q de las componentes AR(p) y MA(q) usando las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial.

3) Finalmente, ajustar los parámetros de los modelos AR y MA hasta satisfacer un criterio de calidad de ajuste (e.g. AIC). Esto es altamente no trivial.

Ejercicio completo: **arima.ipynb**

Juan C. Toledo (C3)
juan.toledo@nucleares.unam.mx

Análisis Espectral (Fourier)

Hasta ahora todo el análisis se ha hecho en el **dominio del tiempo**.

Otra forma de analizar una serie de tiempo es hacerlo en el dominio de la **frecuencia**.

Idea fundamental: transformar la serie de tiempo a una representación en términos de componentes periódicas simples

Nos permite:

- Determinar las componentes periódicas (aún cuando estén "escondidas")
- Establecer el tipo de correlaciones presentes en la serie
- Modelar varios tipos de ruido

Juan C. Toledo (C3)
juan.toledo@nucleares.unam.mx

La Serie de Fourier

Teorema de Fourier: **cualquier** función *periódica* puede ser descrita **exactamente** como una suma (infinita) de funciones armónicas (senosoidales)

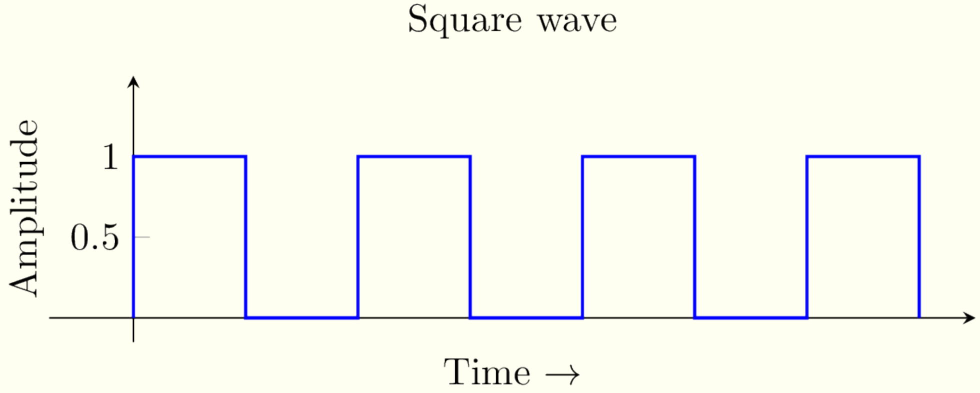
$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{P}x + \phi_n\right)$$

amplitud   frecuencia   fase

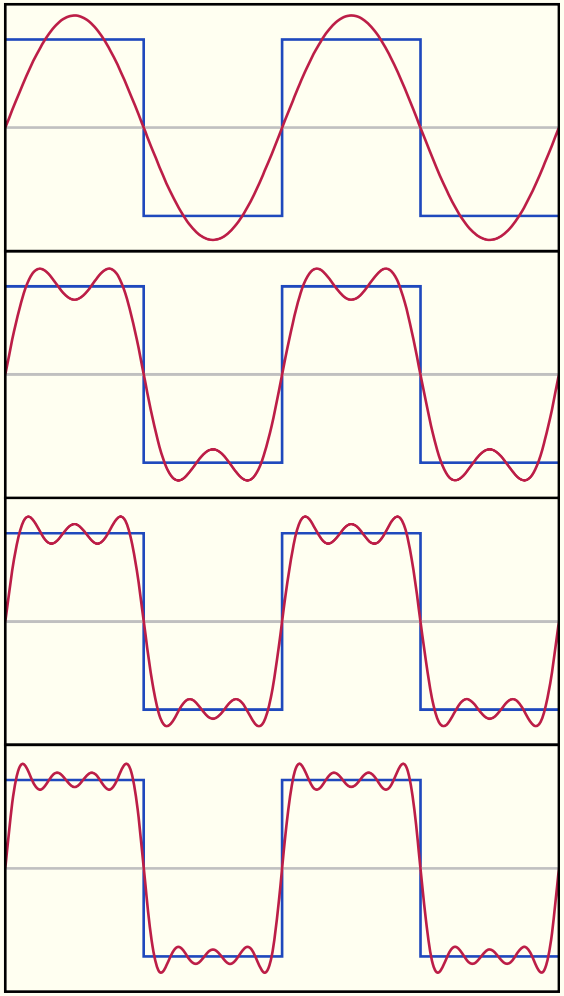
Función arbitraria
con periodo *P*

"armónicos"

La Serie de Fourier



Fourier



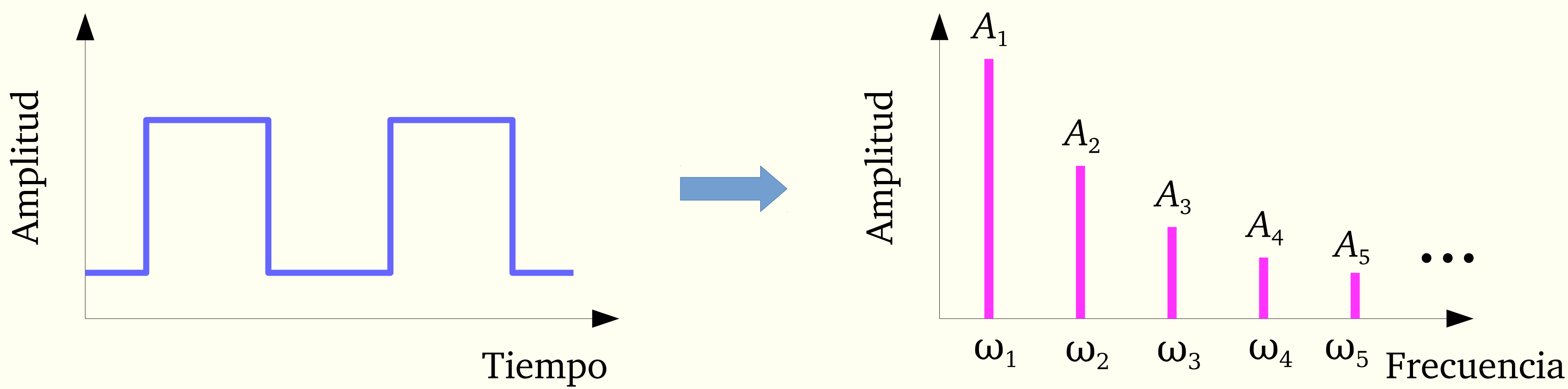
Animación: onda cuadrada con 3 armónicos
https://www.youtube.com/watch?v=LznjC4Lo7lE

En serio, aplica para cualquier función ...
https://www.youtube.com/watch?v=QVuU2YCwHjw

Dominio de la frecuencia

Esto nos lleva a una representación alternativa de cualquier señal en términos de las **amplitudes** de cada una de sus **frecuencias** componentes.

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\underbrace{\frac{2\pi n}{P}}_{\omega} x + \phi_n\right)$$



“Dominio del tiempo” **“Dominio de la frecuencia”**

La Transformada de Fourier

La **transformada** de Fourier generaliza esta idea: representamos una señal en el dominio de la frecuencia empleando una frecuencia que varía **continuamente**

$$\hat{f}(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Transformada de Fourier de la señal
(dominio de la frecuencia)

Señal original
(dominio del tiempo)

Forma “matematicosa” de escribir senos y cosenos

DFT: Transf. de Fourier Discreta

Como las series de tiempo son señales **discretas** (están definidas para una serie de instantes temporales discretos), usamos la versión discreta de la FT:

$$\hat{X}_k \equiv \sum_{t=0}^{N-1} X_t \cdot e^{-2\pi i k t / N}$$

DFT
(un valor
para cada *k*
en [0,N-1])

Serie de
tiempo

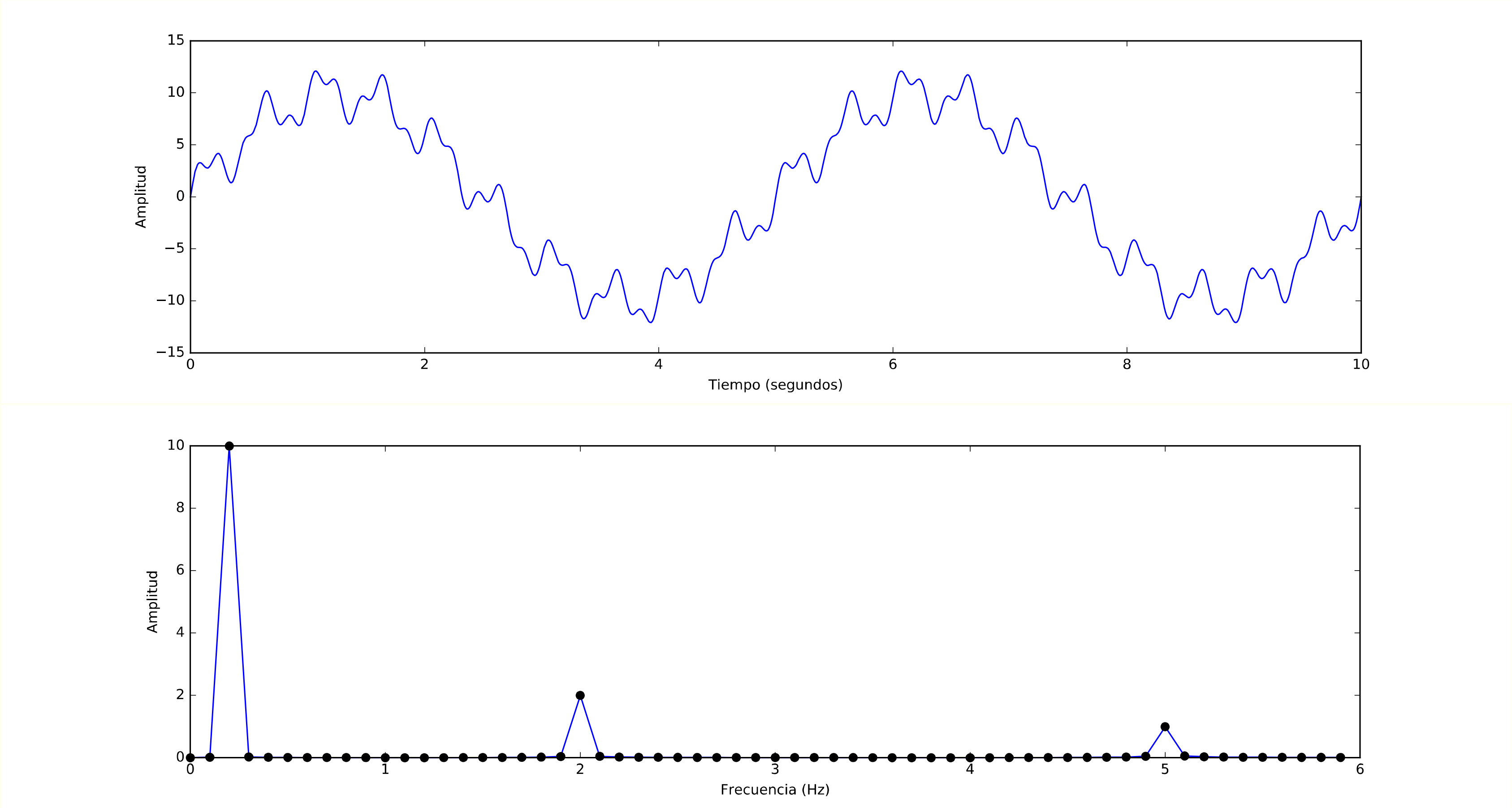
“frecuencia”

Longitud de la
serie de tiempo

Aunque, como veremos, la
mitad son redundantes.

Cálculo del DFT con numpy

Parte 1 de **fourier.ipynb**



Espectro de Potencia

Usualmente se trabaja con la transformada de Fourier no directamente, sino a través de su "primo" el **espectro de potencia**, también conocido como la "densidad espectral de potencia", **PSD** (Power Spectral Density).

Se define simplemente tomando el cuadrado del valor absoluto del DFT:

$$\mathrm{PSD} \equiv S_k \equiv \left|\hat{X}_k\right|^2$$

Debido a que el cuadrado amplifica los valores, se suele graficar en escala log-log.

Ejemplo rápido: manchas solares

manchas.ipynb

Juan C. Toledo (C3)
juan.toledo@nucleares.unam.mx

Artefactos: filtrado espectral

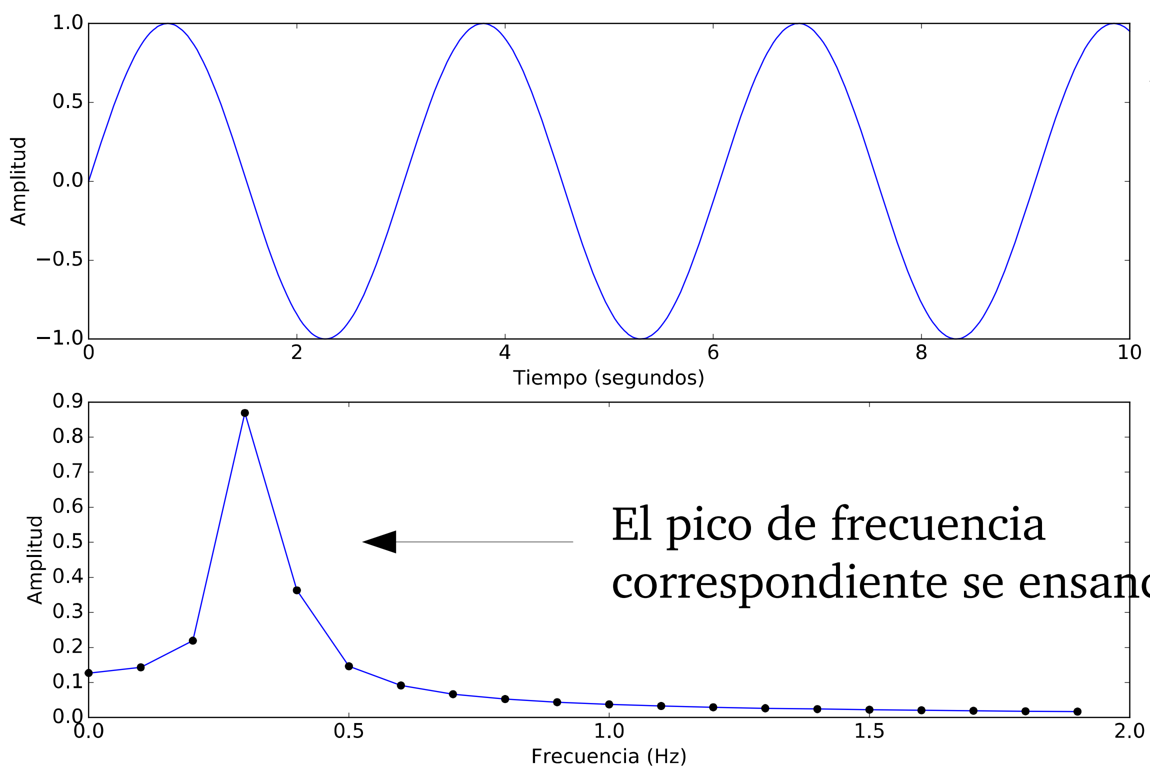
(Parte 2 de **fourier.ipynb)**

Cuando las periodicidades de la serie de tiempo no completan un número entero de ciclos, el DFT **ensancha artificialmente** los picos asociados a esa frecuencia.

Esto se conoce como **filtrado espectral** (*spectral leakage*).

Seno de 0.33 Hz

DFT



La serie no completa un número entero de ciclos

El pico de frecuencia correspondiente se ensancha

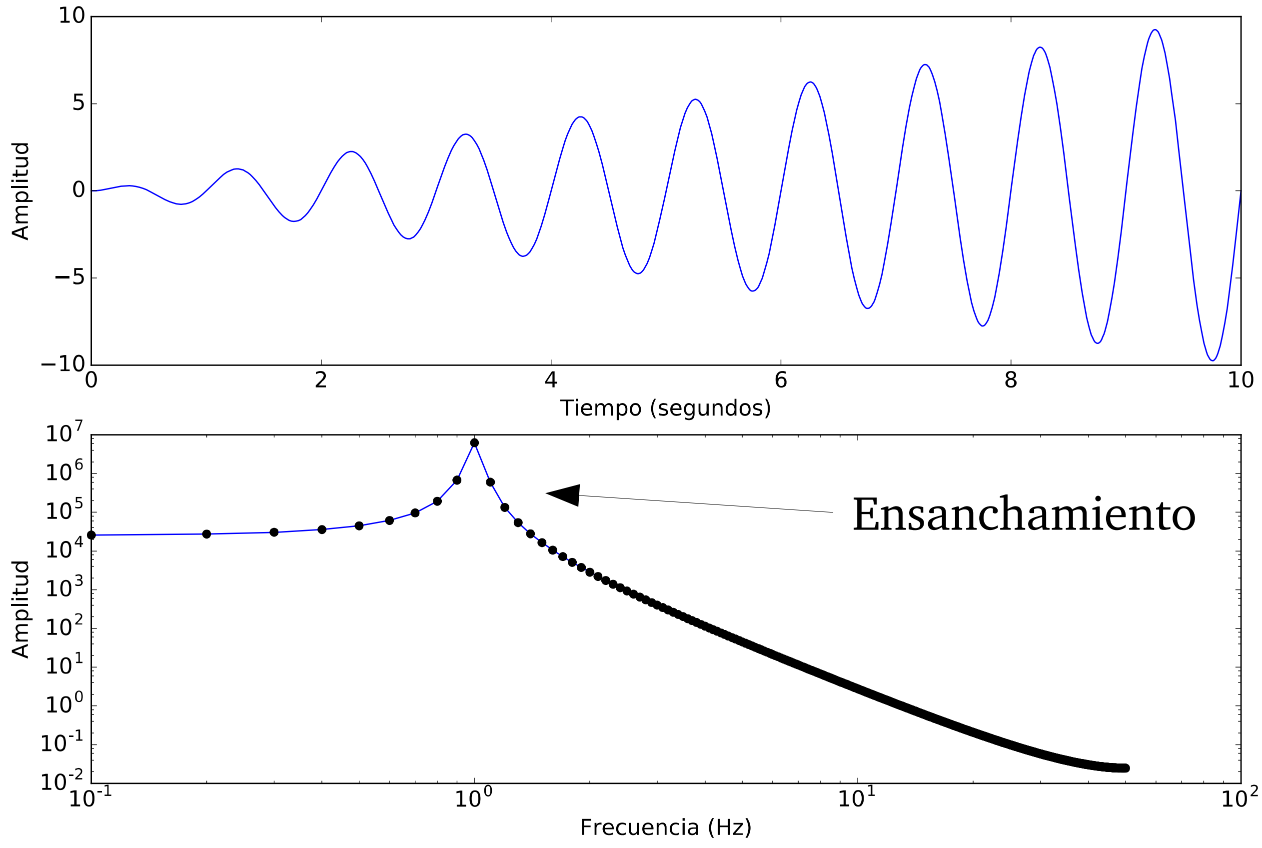
Juan C. Toledo (C3)
juan.toledo@nucleares.unam.mx

Artefactos: filtrado espectral

Esto también ocurre si la componente periódica **no es estacionaria**, por ejemplo porque su amplitud cambia con el tiempo:

Seno de 0.33 Hz con amplitud creciente

PSD

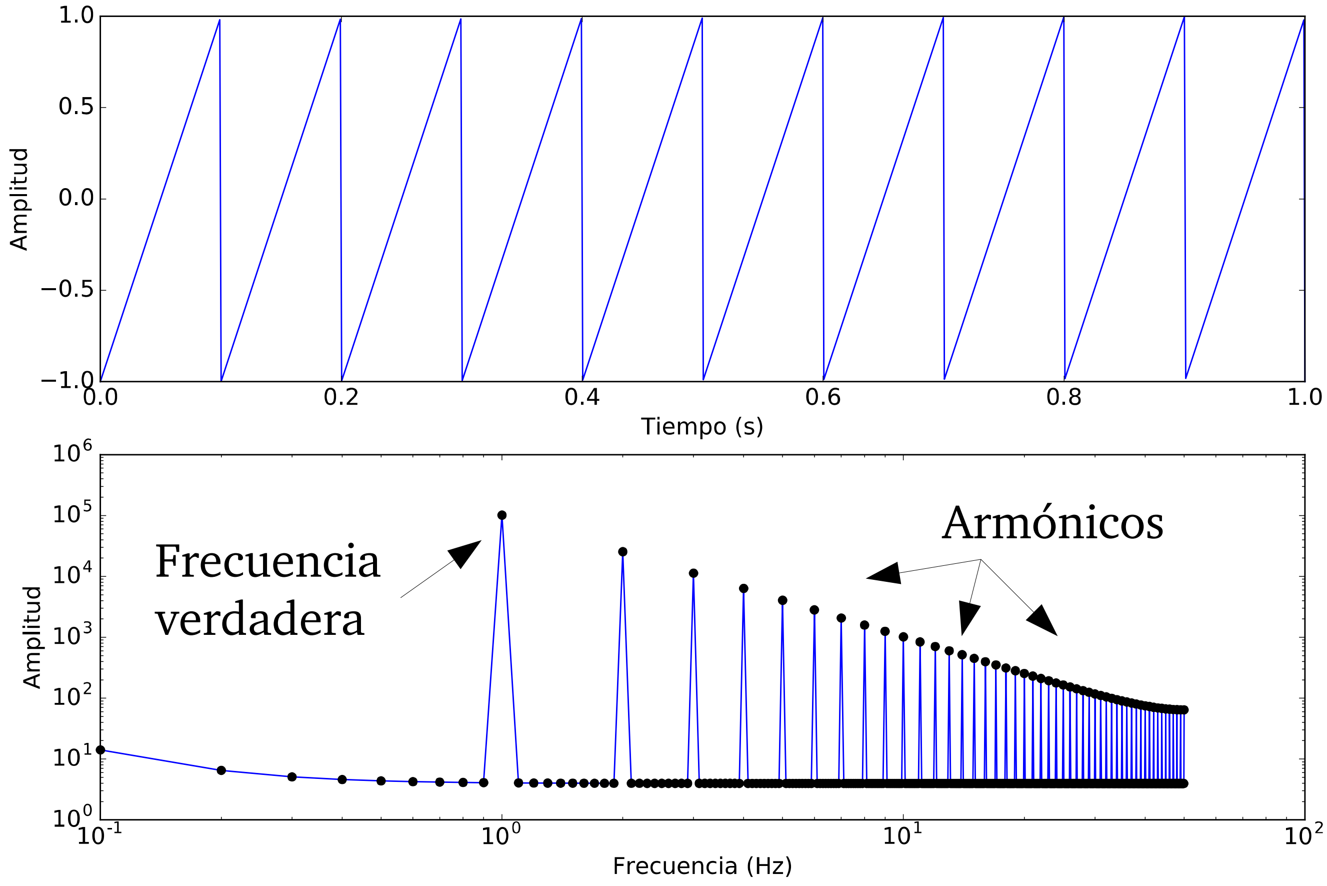


Artefactos: armónicos

Si la periodicidad no es de forma sinusoidal, esto introduce **armónicos espurios**.

Función sierra de 0.1 Hz

PSD

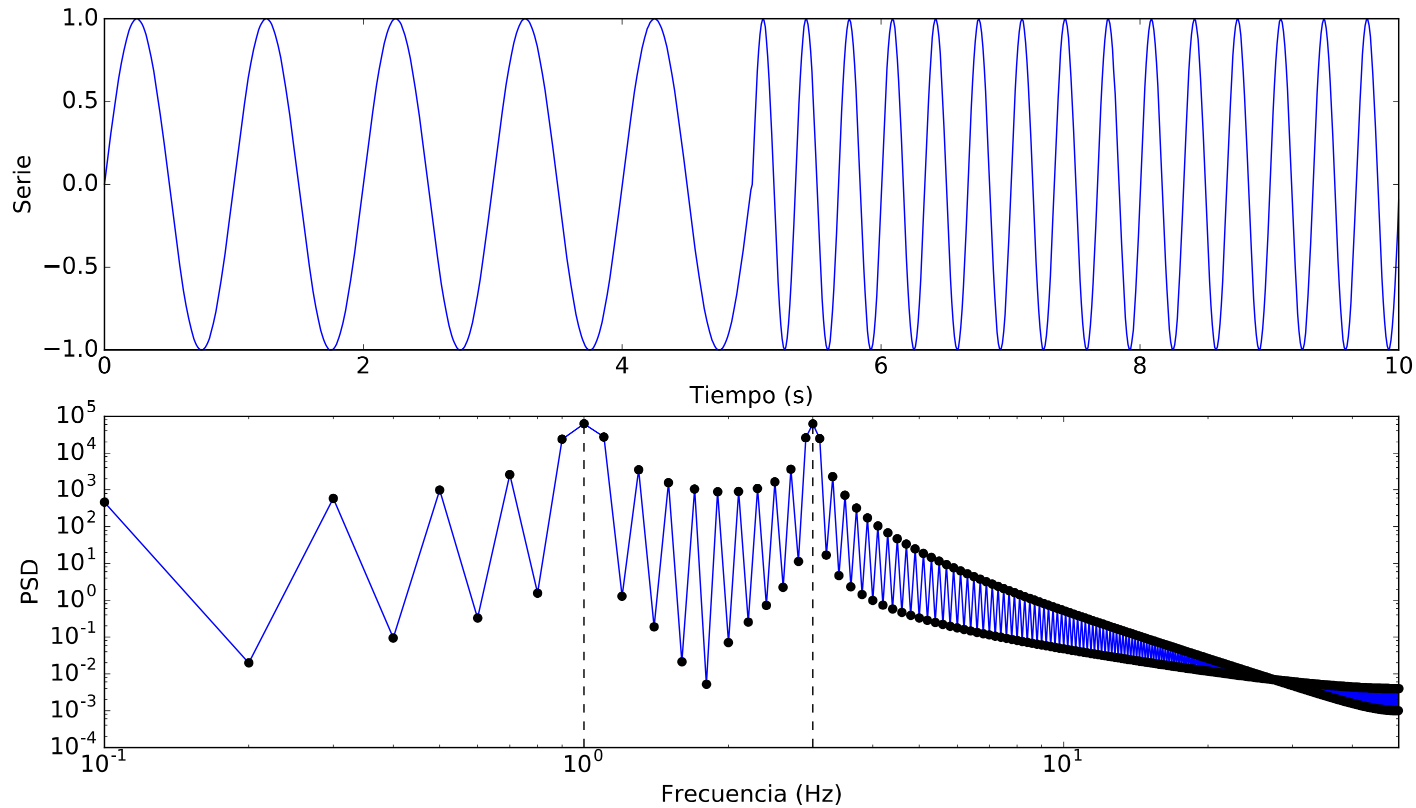


Juan C. Toledo (C3)
juan.toledo@nucleares.unam.mx

No-estacionariedad

(tiempo_frecuencia.ipynb)

Si el contenido espectral de una serie de tiempo no es estacionario, la transformada de Fourier tiene problemas para descomponerla.

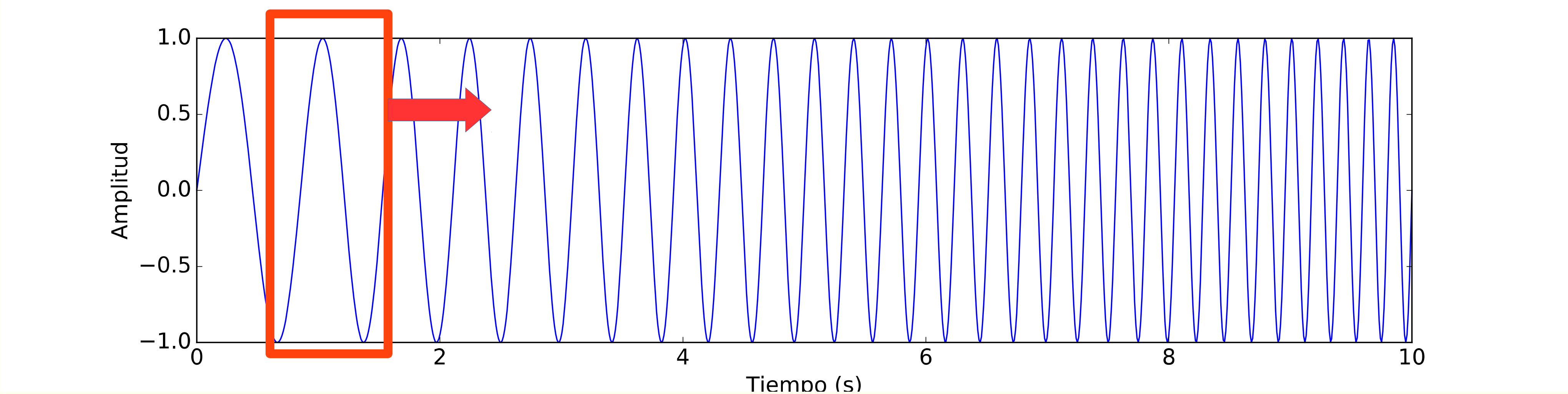


Análisis Tiempo-Frecuencia

Una forma de lidiar con series no-estacionarias es hacer el análisis en **tiempo y frecuencia simultáneamente**.

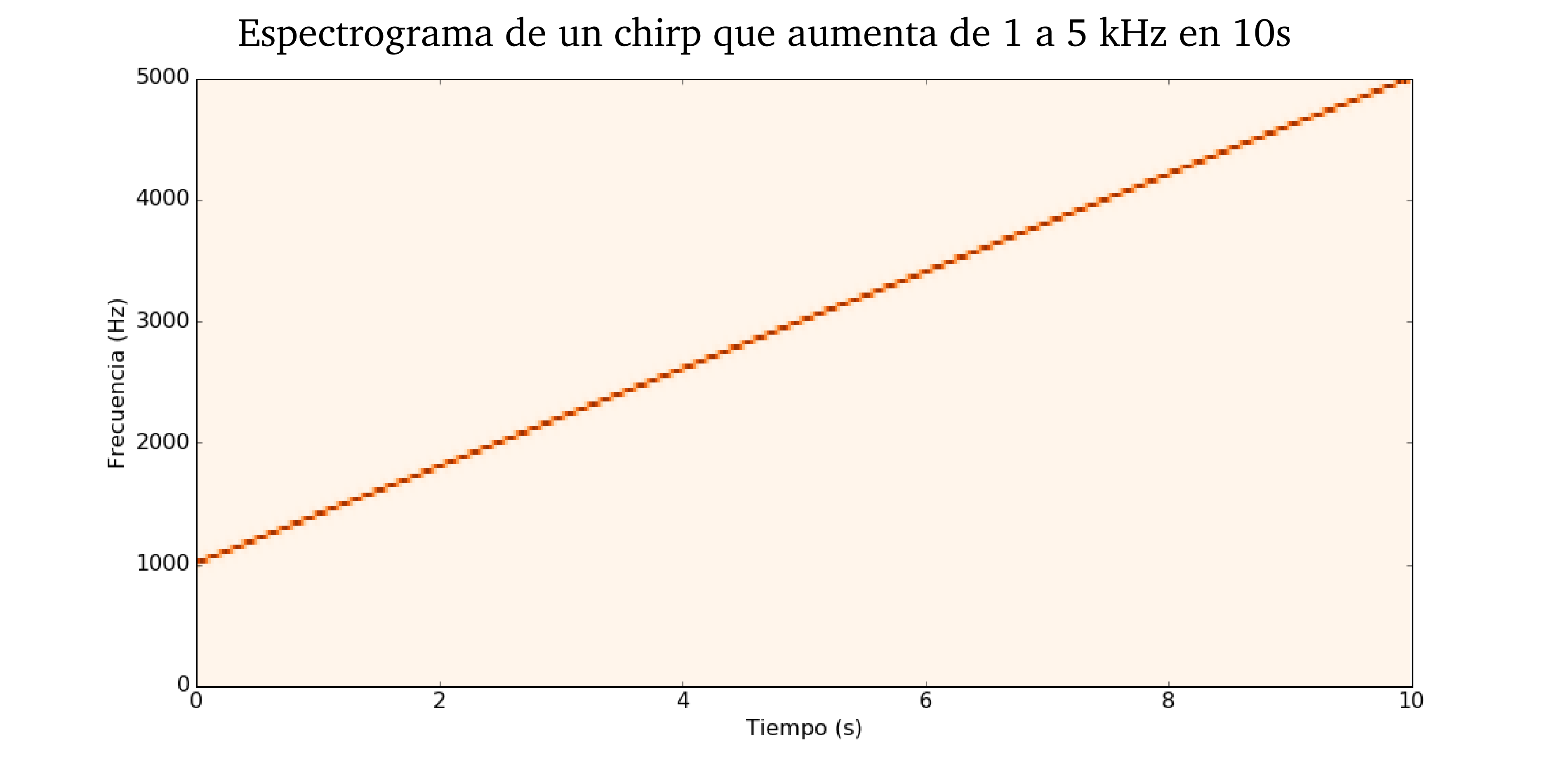
Una técnica sencilla es usar la t**ransformada de Fourier** "**ventaneada**" o **Short-Time-Fourier-Transform (STFT).**

La idea es calcular la transformada de Fourier en una **ventana temporal** pequeña la cual se va **recorriendo** sobre la serie. Con esto se puede capturar un contenido espectral que cambia con el tiempo.



Transf. de Fourier Ventaneada

El resultado es un diagrama 2D que tiene tiempo en un eje y frecuencia en el otro conocido como **espectrograma**.

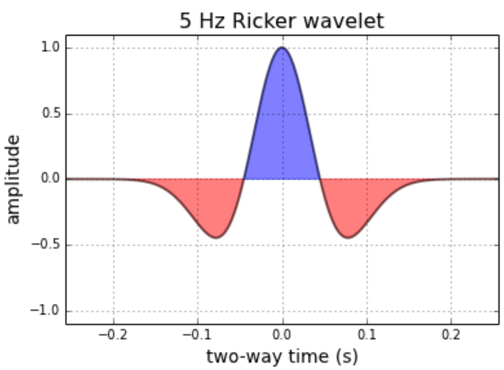


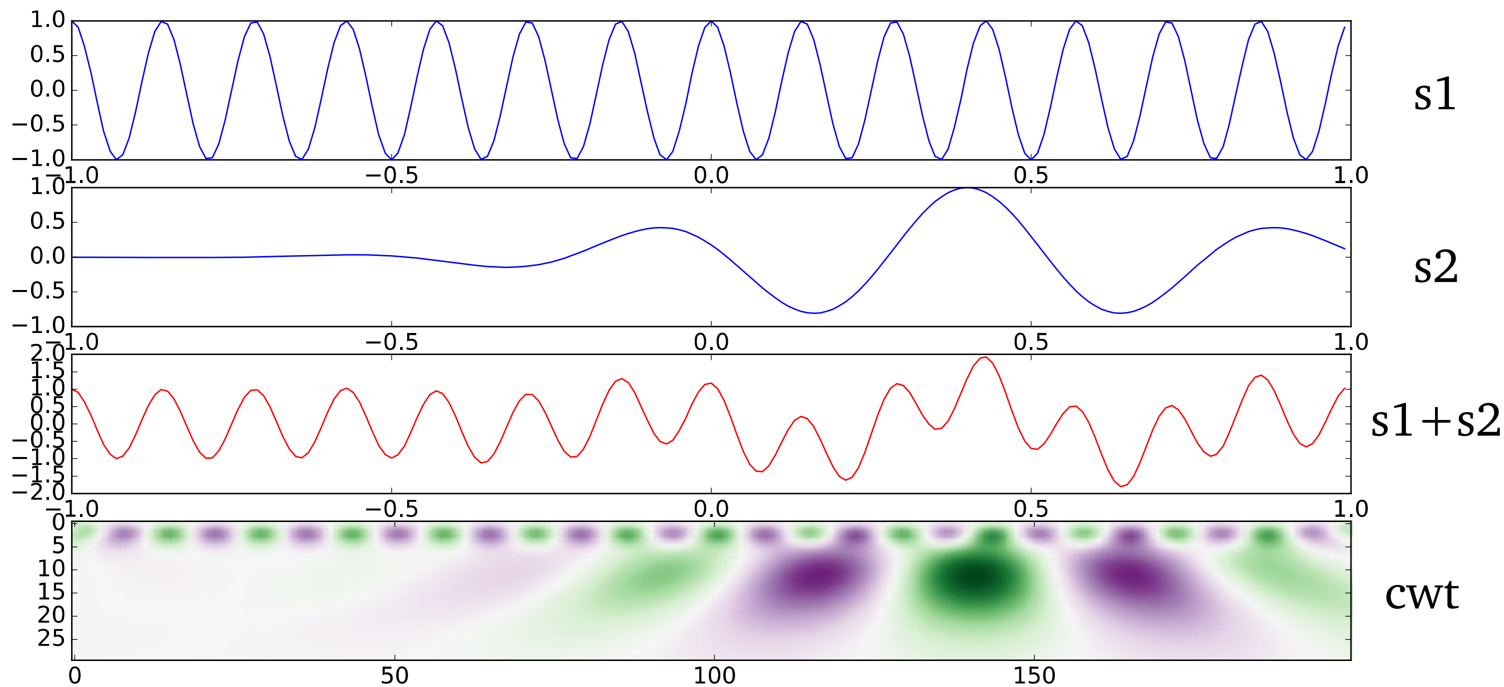
Transformadas de Wavelet

Otra herramienta relacionada de análisis de tiempo-frecuencia son las **transformadas de wavelets** (o CWT, **Continuous Wavelet Transform**).

Es una generalización de la transformada de Fourier: en lugar de usar funciones armónicas se usan **wavelets**: formas de onda arbitraria que pueden cambiar de escala en el tiempo. En scipy existe scipy.signal.cwt() para esto.

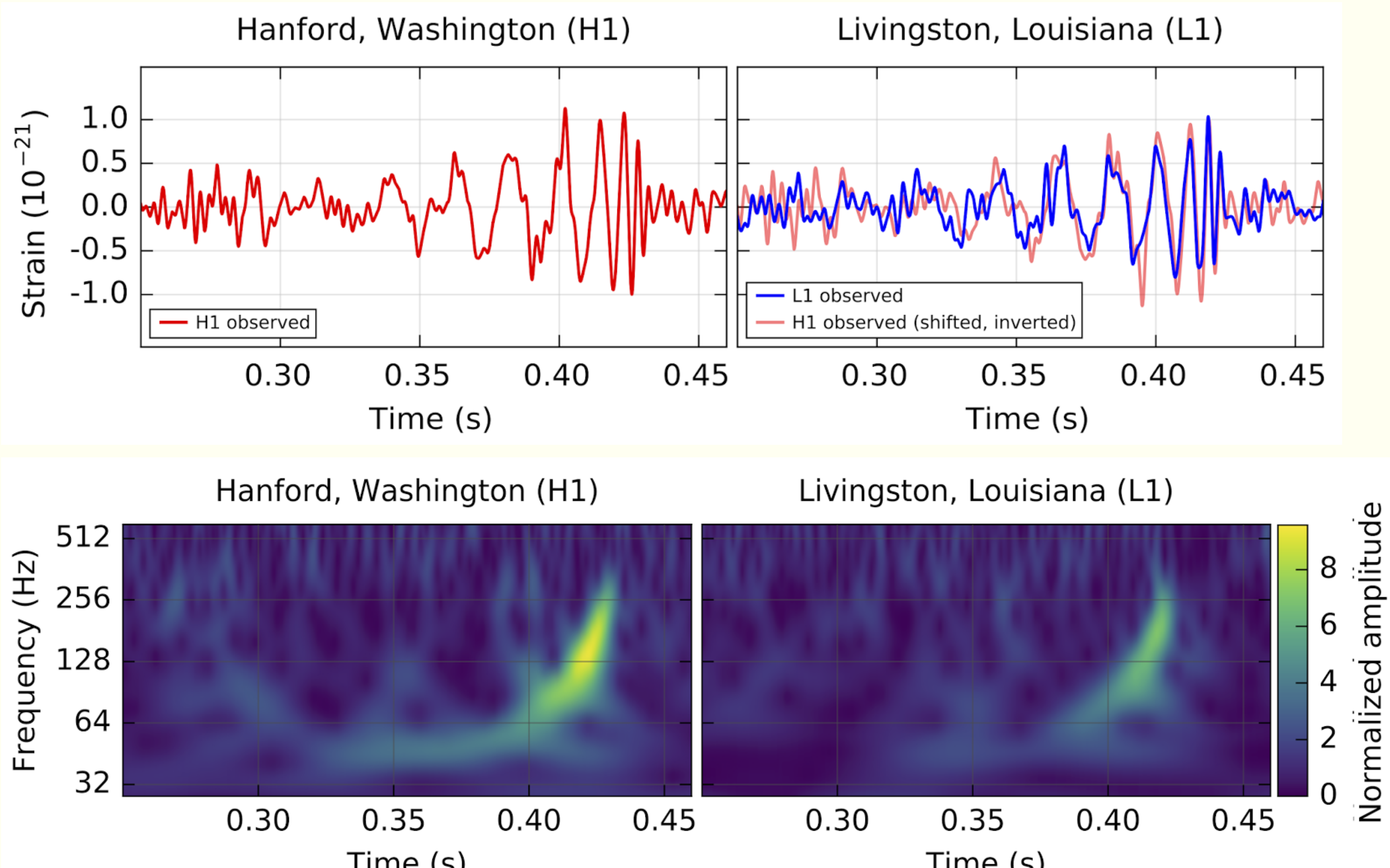
Ricker wavelet, alias "Mexican Hat"





Ejemplo: detección de ondas gravitacionales (LIGO)

http://stuver.blogspot.mx/2016/02/LIGO-FirstDetection.html



Muchos, muchos temas más ...

- Modelos ARIMA estacionales
- Métodos para series de tiempo multivariadas
- Teoría de filtrado
- Transformadas de tiempo-frecuencia avanzadas
- Métodos de decomposición adapatativos
  - Empirical Mode Decomposition
  - Singular Spectrum Analysis
- etc.

Libros …

- Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples
  Shumway and Stoffer

  Hay versión "EZ" gratuita:
  http://www.stat.pitt.edu/stoffer/tsa4/tsaEZ.pdf

- Time Series Analysis: With Applications in R
  Cryer and Chan

- Introductory Time Series with R
  Cowpertwait and Metcalfe

- Time Series Analysis and Forecasting by Example
  Bisgaard and Kulahci